

Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları, İkinci Baskı  
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala  
McGraw-Hill, 2010

## **Bölüm 5**

# **KÜTLE, BERNOLLI VE ENERJİ DENKLEMLERİ**



Rüzgar türbinleri “tarlaları” rüzgardan kinetik enerji elde edip ve onu da elektrik enerjisine dönüştürmek için dünyanın her yerinde inşa edilmektedirler. Bir rüzgar türbininin tasarımında, kütle, enerji, momentum ve açısal momentum dengelerinden yararlanır. Bernoulli denklemi de ön tasarım aşamasında kullanılabilir.

# Amaçlar:

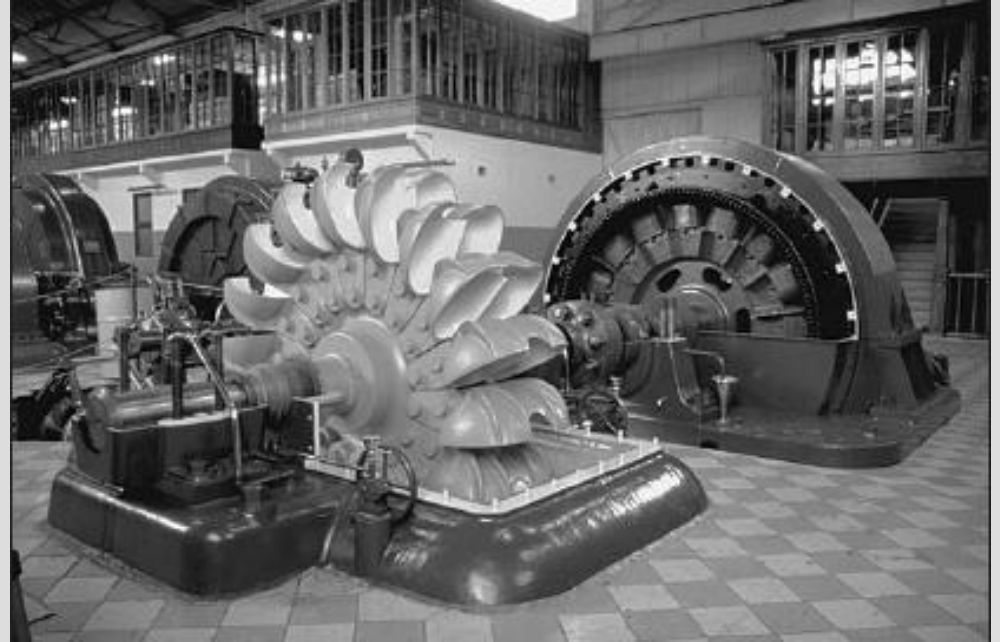
- Bir akış sistemine giren ve çıkan debileri dengeleyebilmek için kütle denklemini uygulayabilmelisiniz.
- Mekanik enerjinin farklı türlerini tanıyabilmeli ve enerji dönüşüm verimleriyle ilgili işlemleri yapabilmelisiniz
- Bernoulli denkleminin kullanımını ve sınırlarını anlayabilmeli ve bu denklemleri farklı türlerdeki akış türleri çözmede kullanabilmelisiniz.
- Yükler cinsinden ifade edilebilen enerji denklemleriyle çalışabilmeli ve bu denklemleri türbin çıkış gücünü ve gerekli pompalama gücünü belirlemede kullanabilmelisiniz.

## 5-1 ■ Giriş

Kütle korunumu, enerji korunumu ve momentum korunumu yasaları gibi pek çok korunum yasalarına daha önceden aşinasınız.

Tarihsel olarak, korunum yasaları ille defa **kapalı sistem** ya da sadece sistem olarak adlandırılan, belirli miktardaki bir maddeye uygulanmıştır ve daha sonra bu sistem uzayda **kontrol hacmi** olarak adlandırılan bölgelere genişletilmiştir.

Bir proses süresince herhangi bir korunumlu büyüklük denge durumunda olacağından korunum bağıntılarından denge denklemleri olarak da söz edilmektedir.



### ŞEKİL 5-1

Bu Pelton çarklı hidrolik türbin gibi, birçok akım makineleri kütle, enerji ve momentumun korunumu ilkeleri uygulanarak analiz edilir.

# Kütlenin Korunumu

Zamanla değişen kapalı bir sistem için kütle korunumu bağıntısı, proses süresince sistemin kütlelerinin sabit kalacağını açık bir şekilde gösteren  $m_{\text{sys}} = \text{sabit}$  veya  $dm_{\text{sys}}/dt = 0$  şeklindeki bir ifade ile belirtilir.

Bir kontrol hacmi (CV) için kütle dengesi, birim zamandaki geçişler cinsinden,

$$\text{Conservation of mass:} \quad \dot{m}_{\text{in}} - \dot{m}_{\text{out}} = \frac{dm_{\text{CV}}}{dt}$$

$\dot{m}_{\text{in}}$  and  $\dot{m}_{\text{out}}$  kontrol hacmine giren ve çıkan toplam kütleli debilerdir

$dm_{\text{CV}}/dt$  kontrol hacmi sınırlan içerisindeki kütle miktarının değişim hızıdır.

**Süreklilik denklemi:** Akışkanlar mekaniğinde, diferansiyel bir kontrol hacmi için yazılan kütle korunumu denklemi genellikle süreklilik denklemi olarak adlandırılır.

# Lineer Momentum Denklemi

**Lineer momentum:** Bir cismin hızının ve kütesinin vektörel çarpımı cismin doğrusal momentumu ya da sadece cismin momentumu olarak adlandırılır

$V$  hızıyla hareket eden  $m$  kütleli bir cismin momentumu  $mV$  'dir.

**Newton'un ikinci kanunu:** Newton'un ikinci yasasına göre bir cismin ivmesi cisme etki eden net kuvvet ile doğru orantılı; cismin kütlesi ile ters orantılıdır ve cismin momentumunun değişim hızı cisme etki eden net kuvvete eşittir.

**Momentumun korunumu:** Bir sistemin momentumu sisteme etki eden net kuvvet sıfır olduğunda sabit kalır ve böylece, sistemin momentumu korunmuş olur.

**Lineer momentum denklemi:** Akışkanlar mekaniğinde, Newton'un ikinci yasasından söz ederken genellikle açısal momentum denklemi ile birlikte doğrusal momentum denklemi deyimi kullanılır.

# Enerjinin korunumu

**Enerjinin korunumu ilkesi (enerji dengesi):** Bir proses esnasında sisteme giren veya çıkan net enerji, sistemin enerji miktarındaki değişime eşittir.

Enerji kapalı bir sistem sınırından ısı ya da iş olarak geçebilir.

Kontrol hacimlerinde kütleli debi yoluyla da enerji geçişi görülür.

*Conservation of energy:* 
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = \frac{dE_{CV}}{dt}$$

$\dot{E}_{in}$  and  $\dot{E}_{out}$

kontrol hacmine birim zamanda giren ve çıkan toplam enerjilerdir

$dE_{CV}/dt$

kontrol hacminin sınırları içerisindeki enerjinin değişim hızıdır

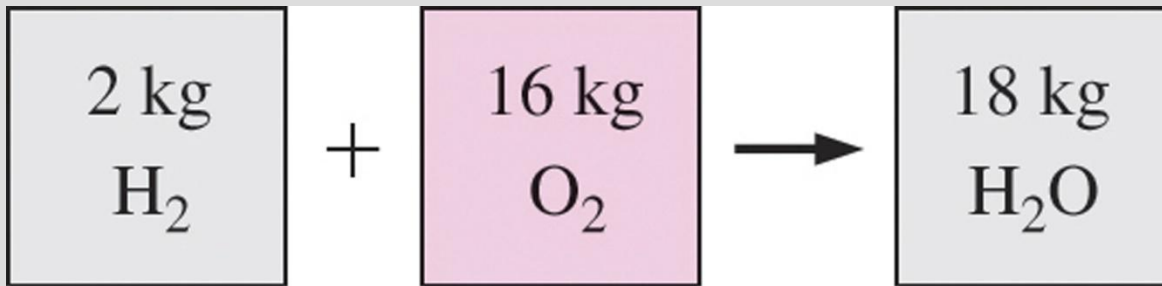
Akışkanlar mekaniğinde, enerjinin sadece mekanik formları ile ilgileneceğiz.

## 5-2 ■ KÜTLENİN KORUNUMU

**Kütlenin korunumu:** Kütle de enerji gibi korunum özelliğine sahiptir ve bir proses boyunca ne yaratılabilir ne de yok edilebilir.

**Kapalı sistem:** Proses boyunca sistemin kütlesi sabit kalır.

**Kontrol hacimleri:** kontrol hacminin sınırlarından kütle geçişi olabilir, dolayısıyla biz kontrol hacmine giren ve çıkan kütle miktarlarını hesaplamalıyız.



Kimyasal reaksiyonlar boyunca dahi kütle korunur.

Kütle  $m$  ve enerji  $E$  birbirine dönüştürülebilir:

$$E = mc^2$$

burada  $c$  ışığın hızı  $c = 2.9979 \times 10^8$  m/s

Enerji değişimine bağlı kütle değişimi ihmal edilebilir.



# Kütlesel ve Hacimsel Debiler

**Kütlesel debi:** Bir en-kesit alanından birim zamanda akan kütle miktarına kütleli debi denir .

Diferansiyel kütleli debi

$$\delta \dot{m} = \rho V_n dA_c$$

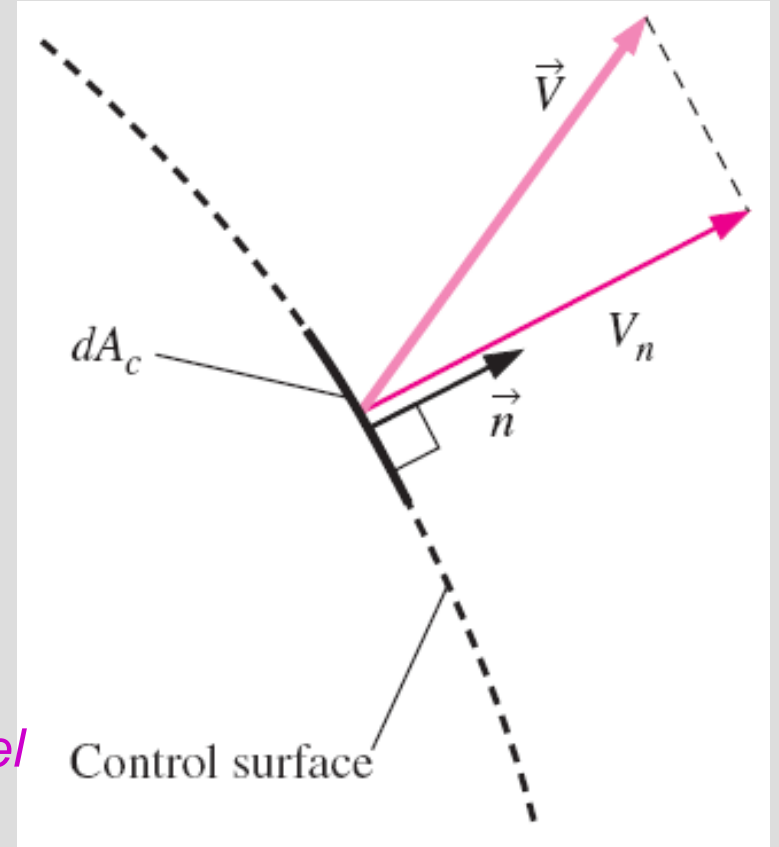
**Nokta fonksiyonları için kesin diferansiyel**

$$\int_1^2 dA_c = A_{c2} - A_{c1} = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

**Yörünge fonksiyonları yaklaşık diferansiyel**

$$\int_1^2 \delta \dot{m} = \dot{m}_{\text{total}}$$

$$\text{not } \dot{m}_2 - \dot{m}_1$$



Bir yüzey için dik hız  $V_n$  hızın yüzeye dik bileşenidir.

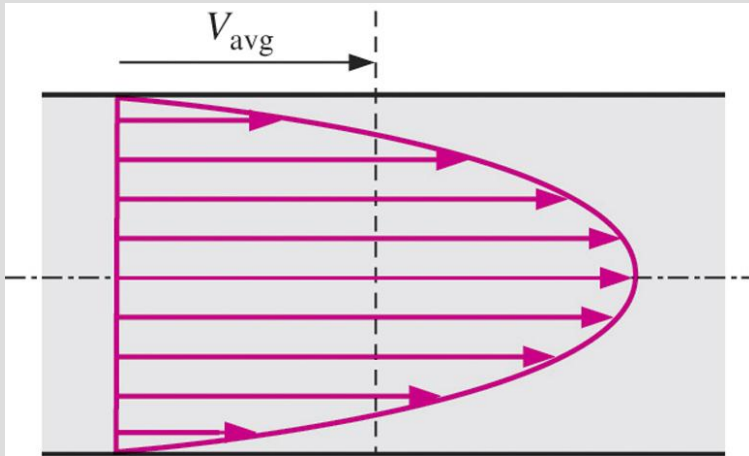
$$\delta \dot{m} = \rho V_n dA_c$$

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta \dot{m} = \int_{A_c} \rho V_n dA_c$$

Kütlesel debi

$$\dot{m} = \rho V_{\text{avg}} A_c \quad (\text{kg/s})$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = \frac{\dot{V}}{v}$$



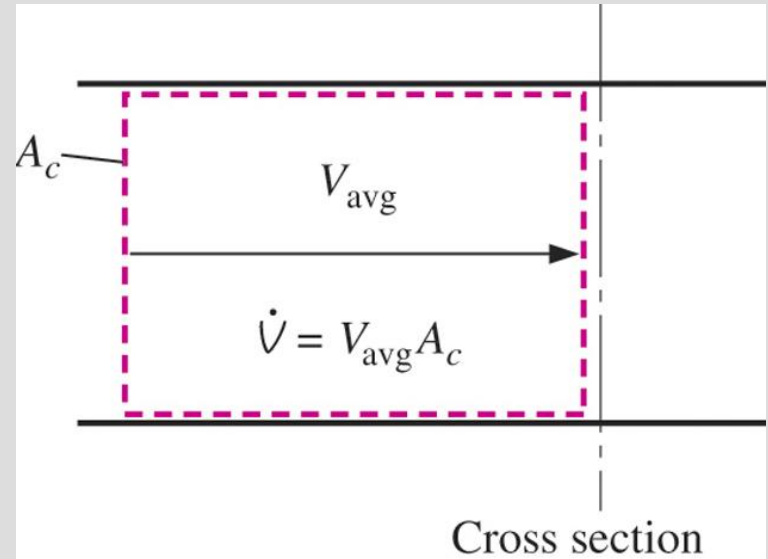
Ortalama hız  $V_{\text{avg}}$ , bir en-kesitteki  $V_n$  hızlarının olarak ortalama değeri tanımlanır.

Ortalama hız

$$V_{\text{avg}} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} V_n dA_c$$

Hacimsel debi

$$\dot{V} = \int_{A_c} V_n dA_c = V_{\text{avg}} A_c = V A_c \quad (\text{m}^3/\text{s})$$



Hacimsel debi bir en-kesitten birim zamanda geçen akışkan hacmidir.

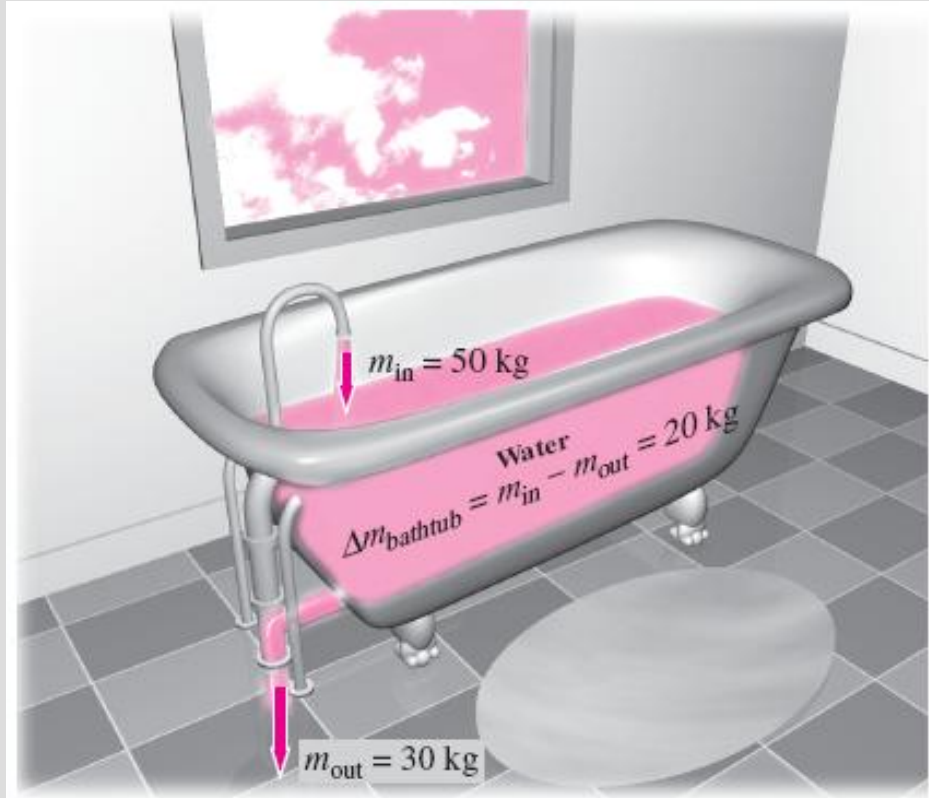
# Kütlenin korunumu ilkesi

Bir kontrol hacminin kütle korunumu ilkesi:  $\Delta t$  zaman aralığında kontrol hacmine giren veya çıkan net kütle geçişi,  $\Delta t$  süresinde kontrol hacmi içerisindeki net kütle değişimine, (artışa ya da azalmaya) eşittir şeklinde ifade edilir.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Total mass entering} \\ \text{the CV during } \Delta t \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Total mass leaving} \\ \text{the CV during } \Delta t \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Net change of mass} \\ \text{within the CV during } \Delta t \end{array} \right)$$

$$m_{in} - m_{out} = \Delta m_{CV} \quad (\text{kg})$$

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = dm_{CV}/dt \quad (\text{kg/s})$$



$\dot{m}_{in}$  and  $\dot{m}_{out}$  Kontrol hacminden giren ve çıkan toplam kütleli debi

$dm_{CV}/dt$  kontrol hacmi sınırları içerisindeki kütle miktarının değişim hızı

**Kütle dengesi** herhangi bir prosesin herhangi bir kontrol hacmine uygulanabilir.

Sıradan bir banyo küveti için kütle korunumu ilkesi

$dm = \rho dV$ . Total mass within the CV:  $m_{CV} = \int_{CV} \rho dV$

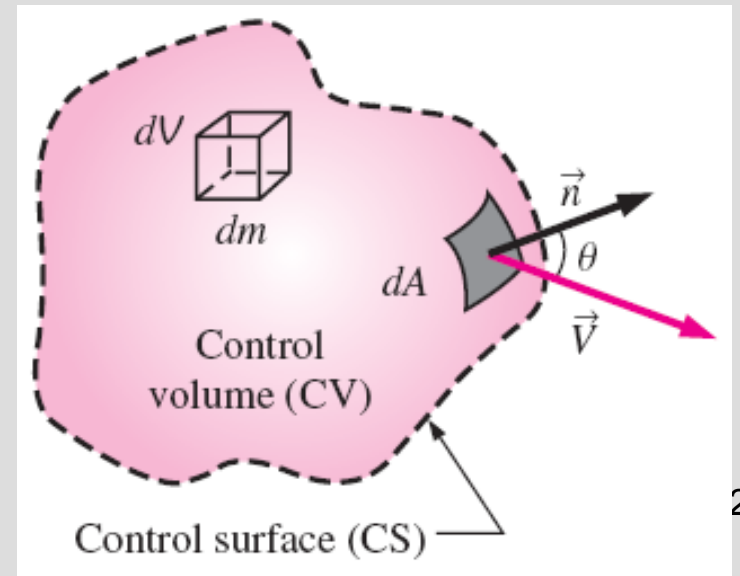
Rate of change of mass within the CV:  $\frac{dm_{CV}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV$

Normal component of velocity:  $V_n = V \cos \theta = \vec{V} \cdot \vec{n}$

Differential mass flow rate:  $\delta \dot{m} = \rho V_n dA = \rho (V \cos \theta) dA = \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$

Net mass flow rate:  $\dot{m}_{net} = \int_{CS} \delta \dot{m} = \int_{CS} \rho V_n dA = \int_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$

Kütlenin korunumu bağıntısının türetilmesinde kullanılan diferansiyel kontrol hacmi  $dV$  ve diferansiyel kontrol yüzeyi  $dA$ .



General conservation of mass:

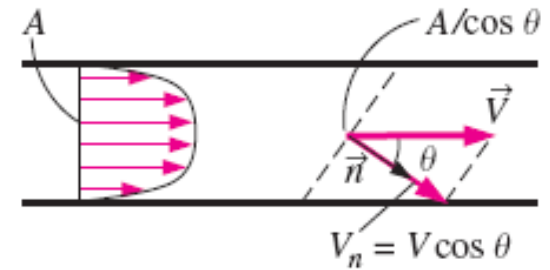
$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Kontrol hacmi içerisindeki kütle zamana bağlı değişim hızı ile kontrol yüzeyinden olan net kütle geçişinin toplamının sıfıra eşit olduğunu ifade eder.

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV + \sum_{out} \rho |V_n| A - \sum_{in} \rho |V_n| A = 0$$

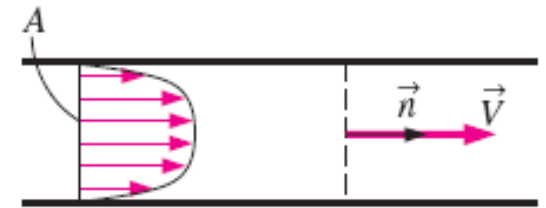
$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

$$\frac{dm_{CV}}{dt} = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$



$$\dot{m} = \rho(V \cos \theta)(A/\cos \theta) = \rho VA$$

(a) Control surface at an angle to the flow



$$\dot{m} = \rho VA$$

(b) Control surface normal to the flow

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$B = m$$

$$b = 1$$

$$b = 1$$

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Kütlenin korunumu ilkesi, Reynolds transport teoremindeki S değişkenini kütle m ile, b değişkenini de 1 (m birim kütle m için = m/m = 1). ile değiştirerek elde edilir.

Sonuç aynı bile olsa, karmaşıklığa meydan vermemek için bir kontrol yüzeyi, akışı kestiği her yerde akışa dik yönde seçilmelidir.

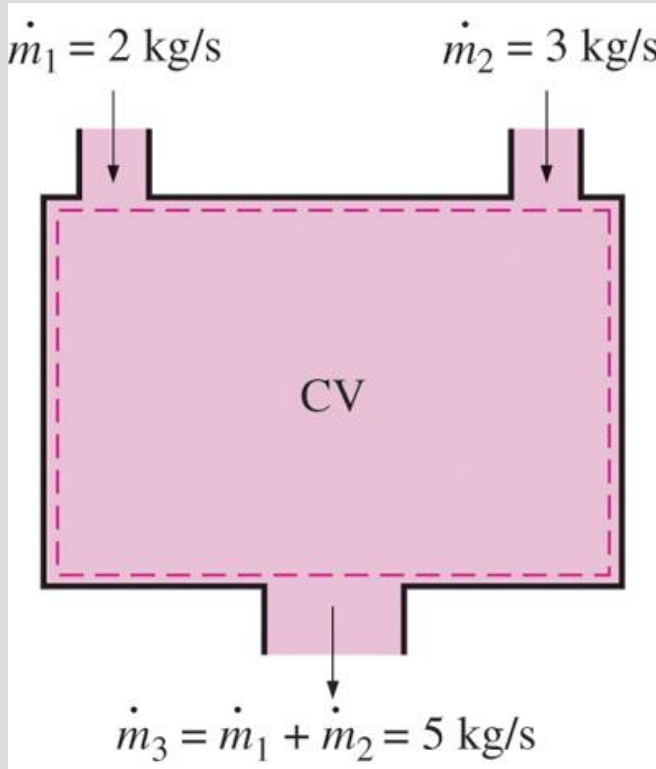
# Hareket eden veya şekil değiştiren kontrol hacimleri

Denklem 5-17 ve Denklem 5-18, *mutlak hız*  $\vec{V}$ 'nin akışkanın kontrol yüzeyine göre hızı olan  $\vec{V}_b$  *bağlı hızı* ile yer değiştirmesi şartıyla, hareket eden ve şekil değiştiren kontrol hacimleri için de geçerlidir (Bölüm 4). Kontrol hacminin şekil değiştirmemesi durumunda, bağlı hız kontrol hacmiyle aynı hızda hareket eden bir kimsenin gözlemlediği akışkan hızıdır ve  $\vec{V}_b = \vec{V} - \vec{V}_{KY}$  şeklinde ifade edilir. Burada,  $V$  akışkanın hızı ve  $F_{KY}$  kontrol yüzeyinin hızı olup her ikisi de kontrol hacmi dışındaki sabit bir noktaya göre olan bağlı hızlardır. Yine bunun bir vektörel çıkarma işlemi olduğuna dikkat ediniz. Bazı uygulamalarda (bir şırınganın iğnesinden şırınga pistonuna kuvvet uygulayarak yapılan ilaç enjeksiyonu gibi) şekil değiştiren kontrol hacimleri söz konusudur. Türettiğimiz kütle korunumu bağıntıları, kontrol yüzeyinin şekil değiştiren kısımlarından geçen akışkanın hızı, kontrol yüzeyine göre bağlı olarak ifade edilmek koşuluyla (yani akışkanın hızı, kontrol yüzeyinin şekil değiştiren kısımla bağlı bir koordinat sistemine göre ifade edilmelidir), bu tür şekil değiştiren kontrol hacimleri için de kullanılabilir. Bu durumda, kontrol yüzeyi üzerindeki her hangi bir referans noktadaki bağlı hız  $\vec{V}_b = \vec{V} - \vec{V}_{KY}$  şeklinde yazılabilir. Burada  $F_{KY}$  kontrol yüzeyinin kontrol hacmi dışındaki sabit bir noktaya göre o noktadaki yerel bağlı hızıdır.

# Daimi akış prosesleri için kütle dengesi

Bir daimi akış prosesinde, kontrol hacmi içerisindeki kütle miktarı zamanla değişmez ( $m_{CV} = \text{sabit}$ ).

Bu durumda, kütle korunumu ilkesi gereği **kontrol hacmine giren toplam kütle miktarı, kontrol hacmini terk eden toplam kütle miktarına eşit olmalıdır.**



Daimi akış proseslerini çözümlerken, bizi ilgilendiren birim zamanda akan kütle miktarı, yani **kütlesel debi**  $\dot{m}$  'dir.

$$\sum_{\text{in}} \dot{m} = \sum_{\text{out}} \dot{m} \quad (\text{kg/s})$$

Çoklu giriş  
çıkış

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

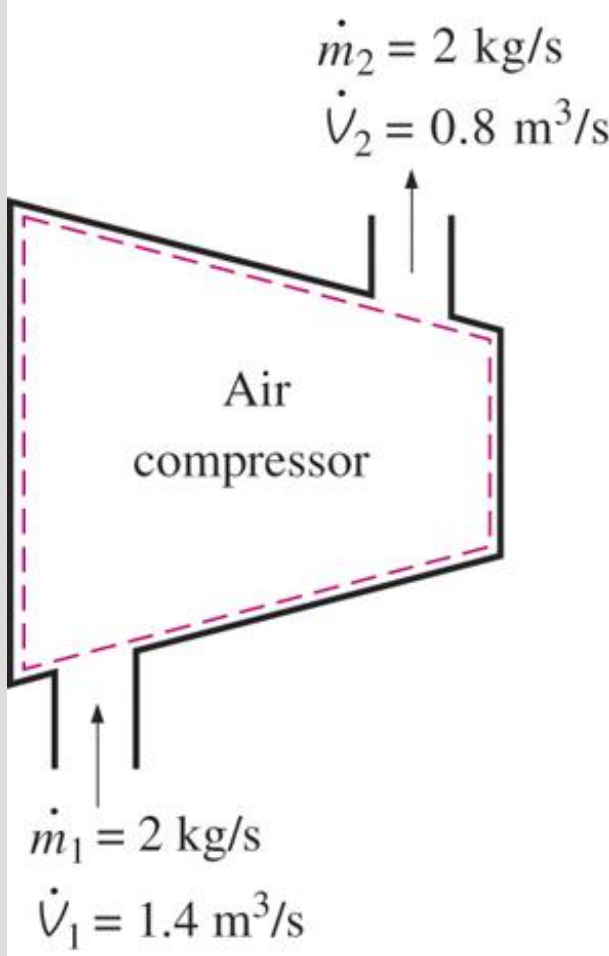
Tek  
akım

Lüleler, yayıcılar, türbinler, kompresörler ve pompalar gibi mühendislik uygulamalarının bir çoğunda tek bir akım (tek giriş ve çıkış) vardır.

İki-girişli bir-çıkışlı daimi akış sistemi için kütle korunumu ilkesi.

# Özel Durum: Sıkıştırılmaz akış

Kütle korunumu bağıntıları, akışkanın sıkıştırılmaz olduğu durumlarda, genellikle sıvılar için, daha da basitleştirilebilir.



$$\sum_{\text{in}} \dot{V} = \sum_{\text{out}} \dot{V} \quad (\text{m}^3/\text{s})$$

**Sıkıştırılmaz akış**

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2$$

**Sıkıştırılmaz akış (tek akımlı)**

" Hacmin korumu" ilkesi diye bir şeyin olmadığını hatırdan çıkaramayız.

Ancak sıvıların daimi akışı söz konusu olduğunda, sıvılar genel olarak sıkıştırılmaz (sabit yoğunluğa sahip) maddeler olduğundan, giriş ve çıkıştaki hacimsel debileri de kütleli debileri gibi sabittir.

Bir daimi akışta kütleli debinin korunması gerekli olmakla birlikte, hacimsel debinin korunması şart değildir.



## Örnek: Bir Bahçe Hortumu Fıskiyesinden Suyun Akışı

Ağızına fıskiye takılmış bir bahçe, hortumu 10 galonluk (37.854 L) bir kovayı suyla doldurmak için kullanılıyor. Borunun iç çapı 2 cm olup fıskiye/çıkışında çap 0.8 cm'ye düşmektedir. Kovayı suyla doldurmak 50 s aldığına göre; (a) hortumdan geçen suyun kütleli ve hacimsel debilerini ve (b) suyun fıskiye çıkışındaki ortalama hızını belirleyiniz.

**ÇÖZÜM:** Bir bahçe hortumu, su kovasını doldurmak için kullanılıyor: Suyun kütleli ve hacimsel debileri ile çıkış hızı belirlenecektir.

*Kabuller: 1 Su sıkıştırılmaz bir maddedir: 2 Hortum içerisindeki akış daimidir: 3 işlem sırasında etrafa su sıçramamaktadır.*

*Özellikler Suyun yoğunluğunu  $1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ kg/L}$  olarak alıyoruz..*

*Analiz (a) 37.854 L suyun 50 s'de aktığını dikkate alarak, suyun hacimsel ve kütleli debileri:*

$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta t} = \frac{10 \text{ gal}}{50 \text{ s}} \left( \frac{3.7854 \text{ L}}{1 \text{ gal}} \right) = \mathbf{0.757 \text{ L/s}}$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (1 \text{ kg/L})(0.757 \text{ L/s}) = \mathbf{0.757 \text{ kg/s}}$$

(b) Hortumdan ve fıskiye üzerinden geçen hacimsel debi sabittir. O zaman a şıkında elde ettiğimiz hacimsel debiyi fıskiye'nin kesit alanına bölersek fıskiye çıkışındaki hızı belirlemiş oluruz.

$$V_e = \frac{\dot{V}}{A_e} = \frac{0.757 \text{ L/s}}{0.5027 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \left( \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}} \right) = \mathbf{15.1 \text{ m/s}}$$



İrdeleme: Hortumdaki suyun ortalama hızının 2,4 m/s olduğu kolaylıkla gösterilebilir., o halde, fıskiye suyun hızını 6 kattan fazla arttırmaktadır.

## Örnek: Bir Tanktan Su Boşaltılması

0.914 m. çapında, 1.219 m yüksekliğinde ve üst yüzeyi atmosfere açık silindirik bir tank başlangıçta su ile doludur. Tankın taban kenarında bulunan boşaltma tapası çekiliyor ve 1.27 cm çapındaki bir su jeti dışarı fışkırıyor (Şekil 5-13). Su jetinin ortalama hızı  $V=(2gh)^{0.5}$  bağıntısıyla verilmektedir. Burada, tank içindeki suyun delik merkezinden dolan yüksekliği (değişken),  $g$  yerçekimi ivmesidir. Tank içindeki su seviyesinin tabandan itibaren 0.609 m yüksekliğe düşmesi için geçecek olan süreyi belirleyiniz.

Analiz: Suyun kapladığı hacmi kontrol hacmi olarak düşünelim. Kontrol hacminin boyutu su seviyesi azaldıkça küçüldüğünden, bu değişken bir kontrol hacmidir, (Kontrol hacmini, boşalan suyun yerini havanın aldığı göz ardı ederek, tankın iç hacminden ibaret sabit bir kontrol hacmi olarak da düşünebilirdik.) Kontrol hacmi içerisindeki özellikler (kütle miktarı gibi) zamanla değiştiği için bunun daimi olmayan bir akış problemi olduğu açıkça görülmektedir. Zamanla değişen bir kontrol için kütle korunumu bağıntısı

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{dm_{cv}}{dt} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. İşlem sırasında kontrol hacmine kütle girişi yoktur ( $\dot{m}_{in} = 0$ )

ve boşaltılan suyun kütleli debisi,

$$\dot{m}_{out} = (\rho VA)_{out} = \rho \sqrt{2gh} A_{jet} \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $m_{cv} = \pi D_{jet}^2 / 4$  su jetinin en-kesit alanıdır ve sabittir.

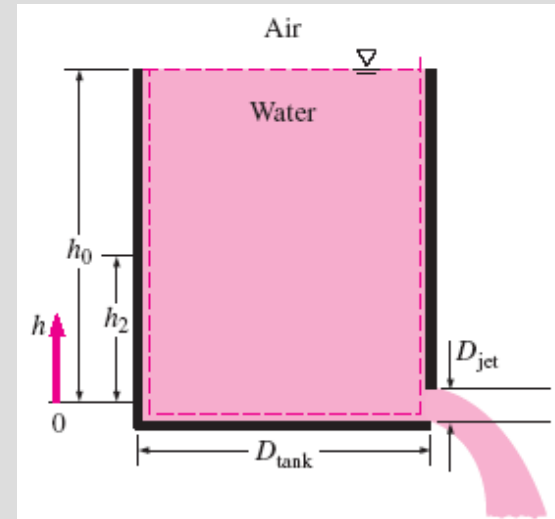


FIGURE 5-13

Schematic for Example 5-2.

Suyun yoğunluğunun sabit olduğu göz önüne alınırsa, herhangi bir anda tank içerisindeki suyun kütlesi

$$m_{cv} = \rho V = \rho A_{\text{tank}} h \quad (3)$$

burada  $A_{\text{tank}} = \pi D_{\text{tank}}^2 / 4$  silindirik tankın taban alanı. Denklem (2) ve (3), kütle dengesi ifadesi denklem (1) 'de yerine yerleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$-\rho \sqrt{2gh} A_{\text{jet}} = \frac{d(\rho A_{\text{tank}} h)}{dt} \rightarrow -\rho \sqrt{2gh} (\pi D_{\text{jet}}^2 / 4) = \frac{\rho (\pi D_{\text{tank}}^2 / 4) dh}{dt}$$

ifadesini elde ederiz. Yoğunluklar ve diğer ortak terimler sadeleştirilerek, değişkenler taraf tarafa ayrılırsa

$$dt = -\frac{D_{\text{tank}}^2}{D_{\text{jet}}^2} \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

$t=0$  'da  $h=h_0$  ve  $t=t$  'de  $h=h_2$  sınır şartlarında integral alırsa

$$\int_0^t dt = -\frac{D_{\text{tank}}^2}{D_{\text{jet}}^2 \sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} \rightarrow t = \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{g/2}} \left( \frac{D_{\text{tank}}}{D_{\text{jet}}} \right)^2$$

ve soruda verilen değerleri yerine koyarsak, suyu boşaltmak için geçecek olan süre,

$$t = \frac{\sqrt{4 \text{ ft}} - \sqrt{2 \text{ ft}}}{\sqrt{32.2/2 \text{ ft/s}^2}} \left( \frac{3 \times 12 \text{ in}}{0.5 \text{ in}} \right)^2 = 757 \text{ s} = \mathbf{12.6 \text{ min}}$$

olarak belirlenir. Öyleyse, tankın yarısı boşaltma tapası çekildikten 12.6 dakika sonra boşalacaktır.

İrdeleme:  $h_2 = 0$  yazılmak suretiyle aynı bağıntı kullanılarak tankın içindeki suyun tamamının boşaltılması için geçecek olan süre  $t=43.1$  dakika olarak bulunur. Tankın alt yarısını boşaltmak tankın üst yarısını boşaltmaktan daha çok zaman alır. Bu durum, suyun ortalama boşaltma hızının, azalan  $h$  değeriyle azalmasından kaynaklanmaktadır.

## 5–3 ■ MEKANİK ENERJİ VE VERİM

Mekanik enerji, ideal türbin gibi ideal mekanik makineler ile tamamen ve doğrudan mekanik işe dönüştürülebilen enerji formu olarak tanımlanabilir.

Akan bir akışkanın birim kütle başına mekanik enerjisi

$$e_{\text{mech}} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \quad \text{Akış enerjisi + kinetik enerji + potansiyel enerji}$$

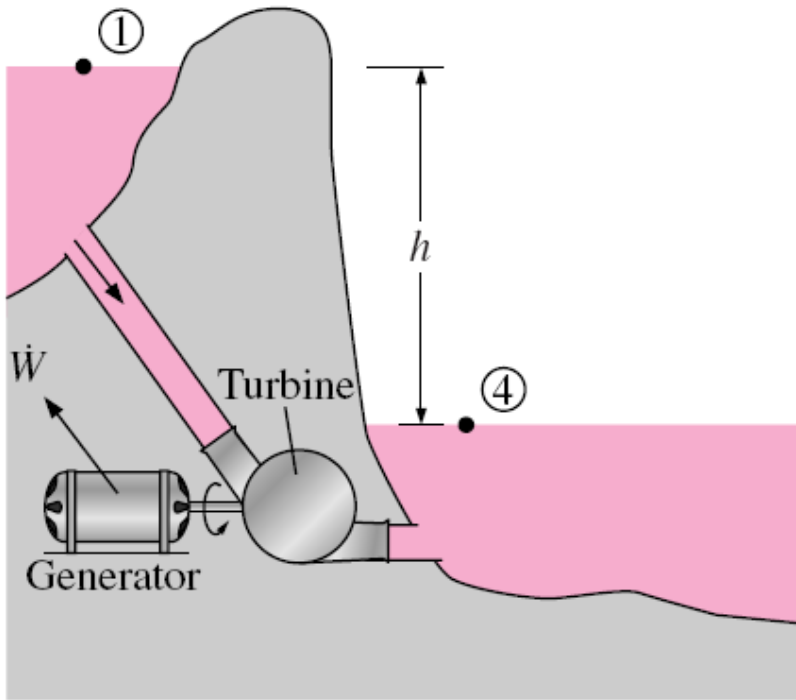
Mekanik enerji değişimi:

$$\Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad (\text{kJ/kg})$$

- Bir akış esnasında akışkanın basıncı, yoğunluğu, hızı ve yüksekliği değişmediği sürece mekanik enerjisi de değişmez.
- Enerji kayıplarının olmadığı hallerde, mekanik enerji değişimi akışkana verilen (eğer  $\Delta e_{\text{mech}} > 0$  ise) veya akışkandan çekilen (eğer  $\Delta e_{\text{mech}} < 0$  ise) mekanik işi göstermektedir.



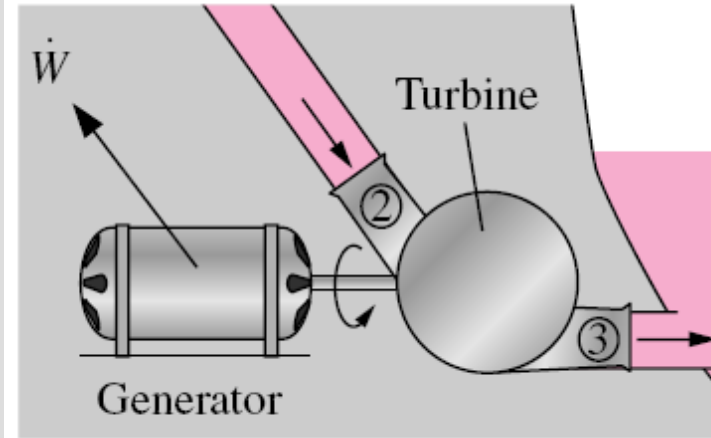
Mekanik enerji, önemli ısı transferi veya enerji dönüşümü içermeyen akışlar örneğin yeraltındaki bir tankdan arabaya benzin akışı için yararlı bir kavramdır.



$$\dot{W}_{\max} = \dot{m}\Delta e_{\text{mech}} = \dot{m}g(z_1 - z_4) = \dot{m}gh$$

since  $P_1 \approx P_4 = P_{\text{atm}}$  and  $V_1 = V_4 \approx 0$

(a)

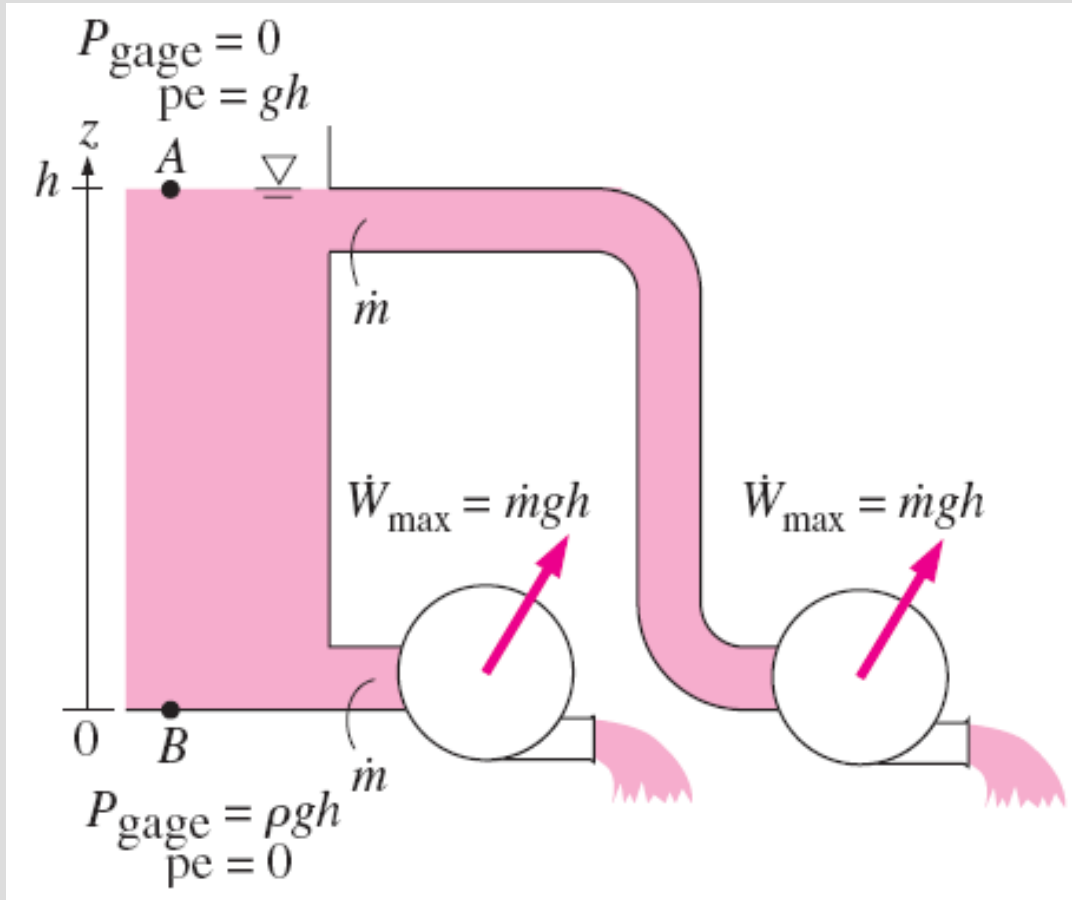


$$\dot{W}_{\max} = \dot{m}\Delta e_{\text{mech}} = \dot{m}\frac{(P_2 - P_3)}{\rho} = \dot{m}\frac{\Delta P}{\rho}$$

since  $V_2 \approx V_3$  and  $z_2 \approx z_3$

(b)

Mekanik enerji, ideal bir jeneratör ile bağlantılı ideal bir hidrolik türbinle gösterilir. Geri dönüşümsüz kayıpların yokluğun en büyük üretilen güç (a) yukarı akım deposundan aşağı akım deposuna doğru serbest su yüzeyindeki değişim (b) Yukarı akımdan türbinin aşağı akımına doğru su basıncındaki düşme.



Bir deponun tabanındaki suyun mekanik enerjisi, deponun serbest yüzeyi de dahil olmak üzere herhangi bir derinlikteki mekanik enerjisine eşittir.

**Mil işi:** Mekanik enerjinin akışkana aktarılması veya akışkandan çekilmesi genellikle dönen bir mil ile gerçekleştirilir ve bu yüzden mekanik işten genellikle *mil işi* olarak söz edilir.

**Bir pompa** veya fan çoğunlukla bir elektrik motordan mil işini alır ve akışkana mekanik enerji olarak en az kayıpla aktarır.

**Türbin** akışkanın mekanik enerjisini mil işine dönüştürür.

$$\eta_{\text{mech}} = \frac{\text{Mechanical energy output}}{\text{Mechanical energy input}} = \frac{E_{\text{mech, out}}}{E_{\text{mech, in}}} = 1 - \frac{E_{\text{mech, loss}}}{E_{\text{mech, in}}}$$

Bir makinenin veya prosesin **mekanik verimi**

Akışkanın mekanik enerjisi ve akışkana verilen ya da akışkandan çekilen mekanik iş arasındaki dönüşüm oranı **pompa verimi** ve **türbin verimi** olarak adlandırılır ,

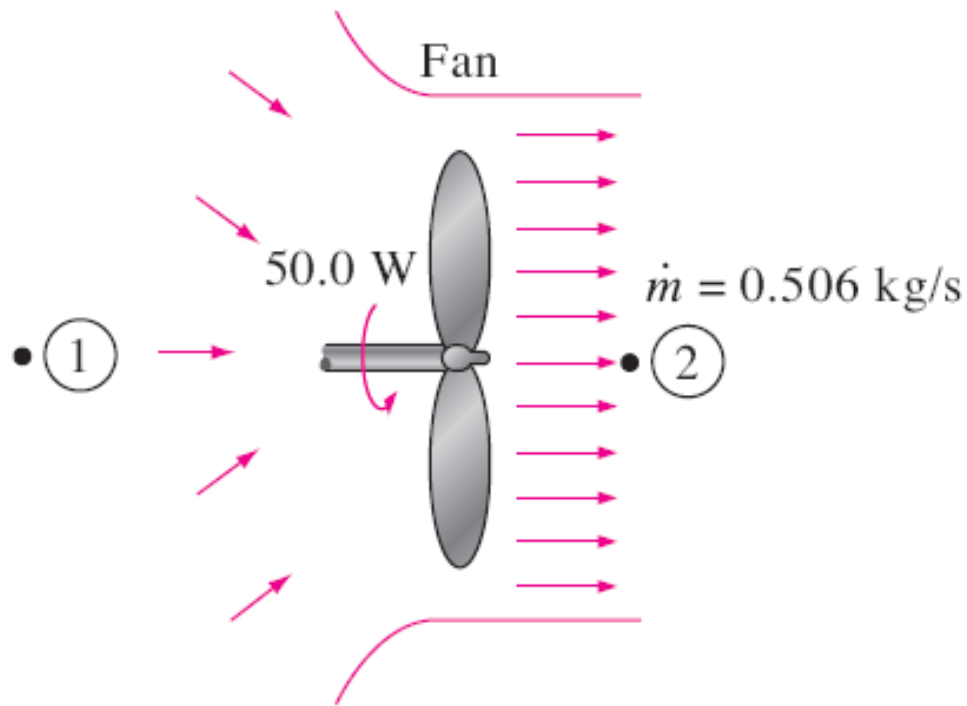
$$\eta_{\text{pump}} = \frac{\text{Mechanical power increase of the fluid}}{\text{Mechanical power input}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump, u}}}{\dot{W}_{\text{pump}}}$$

$$\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}} = \dot{E}_{\text{mech, out}} - \dot{E}_{\text{mech, in}}$$

$$\eta_{\text{turbine}} = \frac{\text{Mechanical power output}}{\text{Mechanical power decrease of the fluid}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft, out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbine}}}{\dot{W}_{\text{turbine, e}}}$$

$$|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}| = \dot{E}_{\text{mech, in}} - \dot{E}_{\text{mech, out}}$$





$$V_1 \approx 0, \bar{V}_2 = 12.1 \text{ m/s}$$

$$z_1 = z_2$$

$$P_1 \approx P_{\text{atm}} \text{ \& } P_2 \approx P_{\text{atm}}$$

$$\eta_{\text{mech, fan}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{\dot{m} V_2^2 / 2}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}}$$

$$= \frac{(0.506 \text{ kg/s})(12.1 \text{ m/s})^2 / 2}{50.0 \text{ W}}$$

$$= 0.741$$

Bir fanın mekanik verimi, havanın fan çıkışındaki kinetik enerjisinin verilen mekanik enerjiye oranıdır.

$$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Mechanical power output}}{\text{Electric power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft,out}}}{\dot{W}_{\text{elect,in}}}$$

Motor  
Verimi

$$\eta_{\text{generator}} = \frac{\text{Electric power output}}{\text{Mechanical power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect,out}}}{\dot{W}_{\text{shaft,in}}}$$

Jeneratör  
Verimi

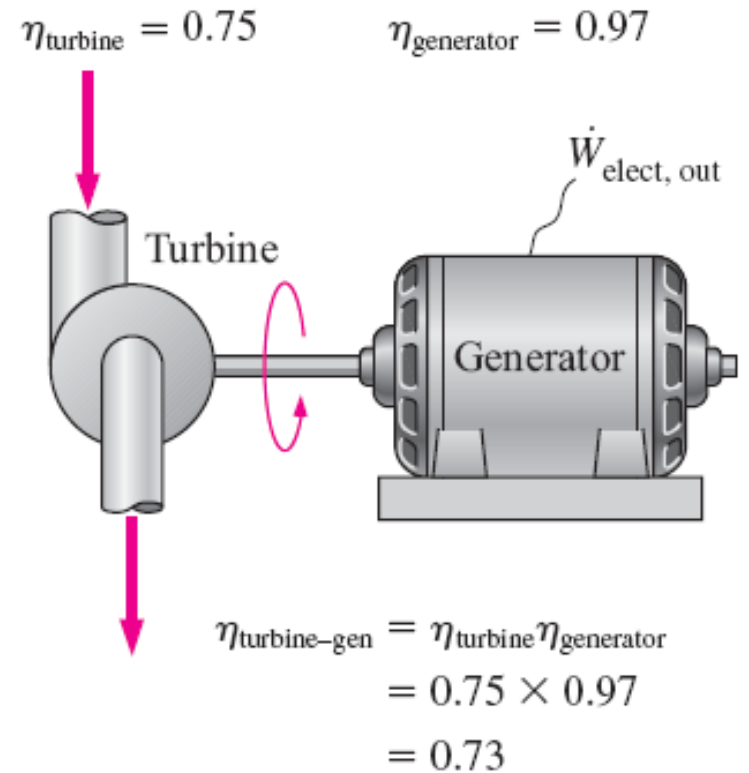
$$\eta_{\text{pump-motor}} = \eta_{\text{pump}}\eta_{\text{motor}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump,u}}}{\dot{W}_{\text{elect,in}}} = \frac{\Delta\dot{E}_{\text{mech,fluid}}}{\dot{W}_{\text{elect,in}}}$$

Pompa-Motor  
toplam verimi

Türbin-Jeneratör toplam verimi:

$$\eta_{\text{turbine-gen}} = \eta_{\text{turbine}}\eta_{\text{generator}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect,out}}}{\dot{W}_{\text{turbine,e}}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect,out}}}{|\Delta\dot{E}_{\text{mech,fluid}}|}$$

Türbin-jeneratör grubunun toplam verimi, türbin verimi ile jeneratör veriminin çarpımıdır ve akışkanın mekanik enerjisinin elektrik enerjisine dönüşüm oranını gösterir.



Tüm verimler % 0 ile % 100 aralığında tanımlanır.

Alt sınır değer olan yüzde 0, giren tüm mekanik enerjinin ya da elektriksel enerjinin ısı enerjisiye dönüştüğü anlamına gelir ve bu durumda makine bir elektrikli ısıtıcı gibi çalışır.

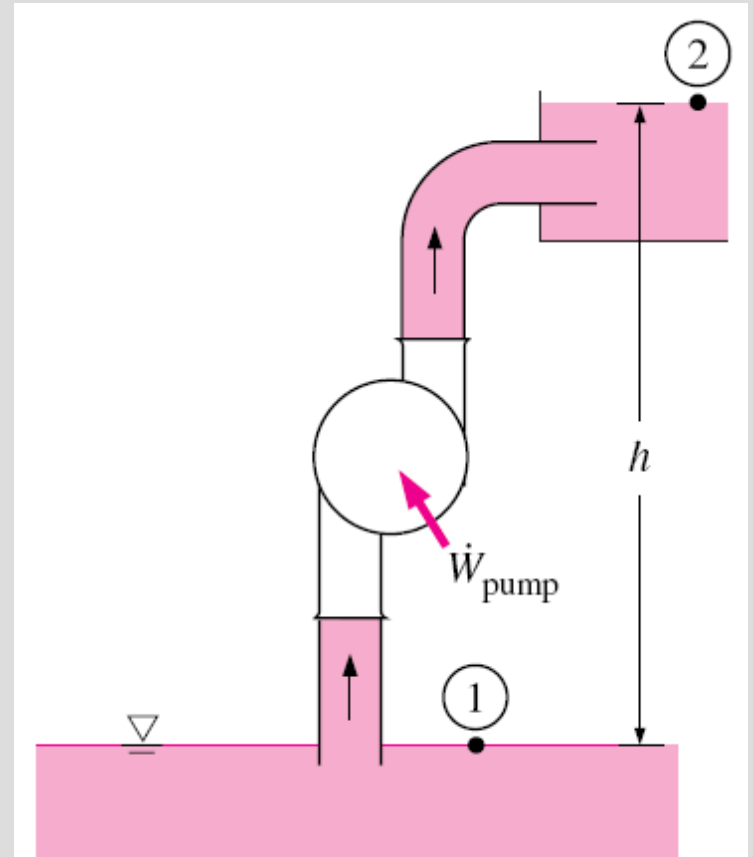
Üst sınır değeri yüzde 100 ise, sürtünme ve diğer tersinmezlikler olmadan tam; bir dönüşümün gerçekleştiğini ve dolayısıyla mekanik enerjinin ya da elektrik enerjisinin ısı enerjisiye dönüşümünün olmadığını gösterir.

Sadece mekanik enerji formlarını ve mil işi dönüşümlerini içeren sistemler için enerji korunumu

$$E_{\text{mech, in}} - E_{\text{mech, out}} = \Delta E_{\text{mech, system}} + E_{\text{mech, loss}}$$

$E_{\text{mech, loss}}$  : Mekanik enerjinin ısı enerjisine sürtünme gibi tersinmezliklere bağlı dönüşümü.

Akış problemlerinin çoğu enerjinin sadece mekanik formlarını içerir ve bu tür problemler *mekanik enerji dengesi* kullanılarak çözülebilir.



Steady flow

$$V_1 = V_2 \approx 0$$

$$z_2 = z_1 + h$$

$$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$$

$$\dot{E}_{\text{mech, in}} = \dot{E}_{\text{mech, out}} + \dot{E}_{\text{mech, loss}}$$

$$\dot{W}_{\text{pump}} + \dot{m}gz_1 = \dot{m}gz_2 + \dot{E}_{\text{mech, loss}}$$

$$\dot{W}_{\text{pump}} = \dot{m}gh + \dot{E}_{\text{mech, loss}}$$

## Örnek 5.3: Bir hidrolik türbin – jeneratör grubunun performansı

Büyük bir göldeki su, şekilde gösterildiği gibi su derinliğinin 50 m olduğu bir yere bir hidrolik türbin-jeneratör grubu yerleştirmek suretiyle elektrik üretilmek için kullanılacaktır. Su, türbine 5000, kg/s'lik kütleli debi ile girmektedir. Üretilen elektrik gücü 1862 kW olarak ölçüldüğüne ve jeneratör verimi yüzde 95 olduğuna göre (a) türbin jeneratör grubunun toplam verimini (b) türbinin mekanik verimini, (c) türbinden jeneratöre verilen mil gücünü belirleyiniz.

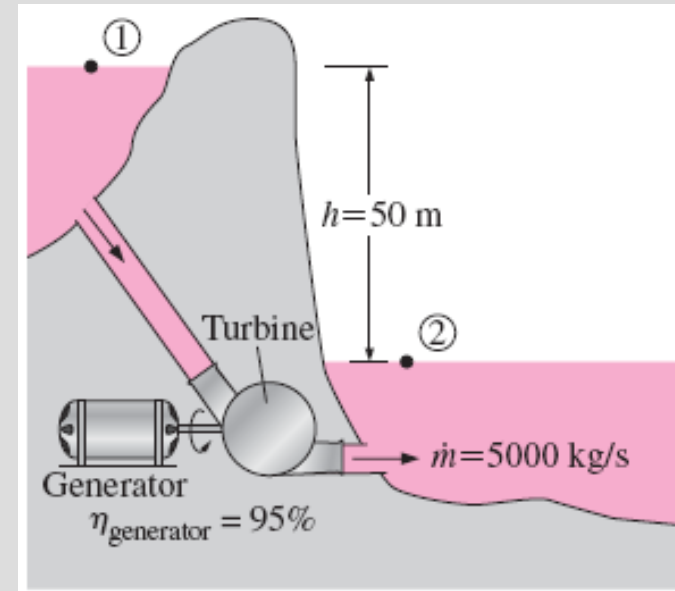
**ÇÖZÜM:** Bir hidrolik türbin-jeneratör grubu göl suyundan elektrik üretmede kullanılacaktır, Toplam verim, türbin verimi ve mil gücü belirlenecektir.

**Kabuller:** 1) Göldeki su seviyesi değişmemektedir. 2) Türbin çıkışındaki suyun mekanik enerjisi ihmal edilebilir,

**Özellikler:** (Suyun yoğunluğu  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  alınabilir.

**Analiz:** Uygunluk açısından, gölün tabanını referans düzlemi olarak alabiliriz. Bu durumda, suyun kinetik ve potansiyel enerjileri sıfır olur ve suyun birim kütle başına mekanik enerjisinde meydana gelen değişim,

$$\begin{aligned} e_{\text{mech, in}} - e_{\text{mech, out}} &= \frac{P_{\text{in}} - P_{\text{out}}}{\rho} + \frac{V_{\text{in}}^2 - V_{\text{out}}^2}{2} + g(z_{\text{in}} - z_{\text{out}}) \\ &= gh \\ &= (9.81 \text{ m/s}^2)(50 \text{ m}) \left( \frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2} \right) = 0.491 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$



Bu durumda, akışkandan türbine aktarılan mekanik enerji ve toplam verim;

$$|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}| = \dot{m}(e_{\text{mech, in}} - e_{\text{mech, out}}) = (5000 \text{ kg/s})(0.491 \text{ kJ/kg}) = 2455 \text{ kW}$$

$$\eta_{\text{overall}} = \eta_{\text{turbine-gen}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect, out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}|} = \frac{1862 \text{ kW}}{2455 \text{ kW}} = \mathbf{0.76}$$

**(b)** Toplam verim ve jeneratör verimini bildiğimizden, türbinin mekanik verimini aşağıdaki gibi belirleyebiliriz

$$\eta_{\text{turbine-gen}} = \eta_{\text{turbine}} \eta_{\text{generator}} \rightarrow \eta_{\text{turbine}} = \frac{\eta_{\text{turbine-gen}}}{\eta_{\text{generator}}} = \frac{0.76}{0.95} = \mathbf{0.800}$$

**(c)** Alınan mil gücü ise mekanik verim tanımından belirlenebilir.

$$\dot{W}_{\text{shaft, out}} = \eta_{\text{turbine}} |\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}| = (0.80)(2455 \text{ kW}) = 1964 \text{ kW} \approx \mathbf{1960 \text{ kW}}$$

**İrdeleme:** Göl türbine 2455 kW 'lık enerji sağlar, türbin bu enerjinin 1964 kW'lık kısmını mil işine dönüştürür ve mil işi de 1862 kW 'lık elektrik gücü üreten jeneratörü tahrik eder. Elemanlar arasındaki geçişlerde tersinmez kayıpların olduğuna dikkat ediniz.

## Örnek 5.4: Salınım Hareketi Yapan Bir Çelik Bilye İçin Enerjinin Korunumu

Bir çelik bilyenin Şekil 5-19 'da gösterilen, yarıçapı A olan yarım küre şeklindeki bir kase içindeki hareketi incelenecektir. Bilye başlangıçta noktasında tutuluyor ve daha sonra serbest bırakılıyor. Bilyenin sürtünmesiz ve gerçek hareket durumları için enerjinin korunumu bağıntılarını elde ediniz.

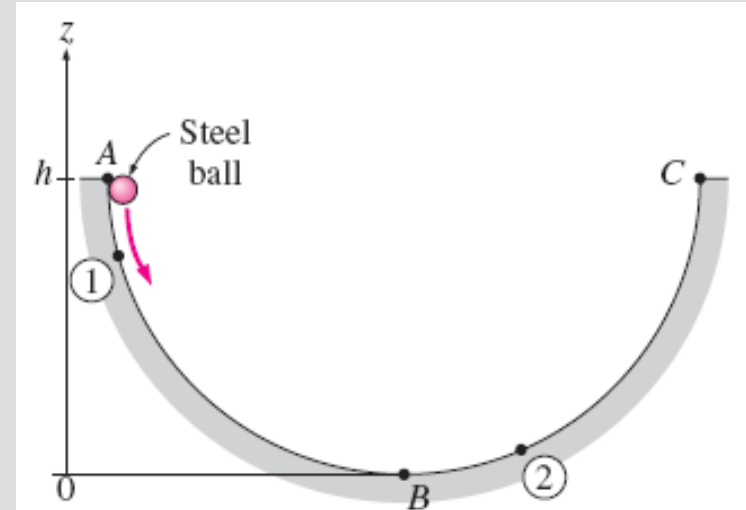
**ÇÖZÜM:** Bir çelik bilye kaseye serbest bırakılıyor: Enerji dengesi için bağıntılar elde edilecektir.

**Kabuller:** Hareket sürtünmesizdir ve bunun sonucu olarak, bilye, kase ve hava arasındaki sürtünmeler ihmal edilmektedir.

**Analiz:** Bilye serbest bırakıldığında yer çekiminin etkisiyle aşağıya doğru ivmelenir ve kaseye dibindeki B noktasında maksimum hızına (ve en düşük yüksekliğe) ulaşır ve daha sonra karşı taraftaki C noktasına doğru hareket eder. Sürtünmenin olmadığı ideal koşullarda, bilye A ve C arasında salınım hareketi yapacaktır. Gerçek hareket, bilyenin kinetik ve potansiyel enerjilerinin sürtünmeyi yenerek birbirlerine dönüşümünü içerir.

Herhangi bir hal değişimine uğrayan bir sistem için genel enerji dengesi,

$$\underbrace{E_{in} - E_{out}}_{\text{Net energy transfer by heat, work, and mass}} = \underbrace{\Delta E_{system}}_{\text{Change in internal, kinetic, potential, etc., energies}}$$



Bu durumda, bilyenin 1 noktası ile 2 noktası arasında gerçekleşen hareketi için enerji dengesi,

$$-w_{\text{friction}} = (ke_2 + pe_2) - (ke_1 + pe_1)$$

yada, ısı veya kütle ile bir enerji geçişi ve bilyenin iç enerjisinde bir değişim olmadığından (sürtünmeden kaynaklanan ısı çevre havasına yitmektedir),

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{friction}}$$

haline gelir. Sürtünme işi terimi  $w_{\text{friction}}$  çoğu zaman ısı enerjisiye dönüşen (kayıp) mekanik enerjiyi gösterdiği için  $e_{\text{loss}}$  olarak ifade edilir. Hareketin sürtünmesiz kabul edildiği idealleştirilmiş durumlar için ise son bağıntı,

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad \text{or} \quad \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{constant}$$

olacaktır. Buradaki sabitin değeri  $C = gh$ 'dir. Yani sürtünme etkileri ihmal edilebilir 'lduğunda, bilyenin potansiyel ve kinetik enerjilerinin toplamı sabittir.

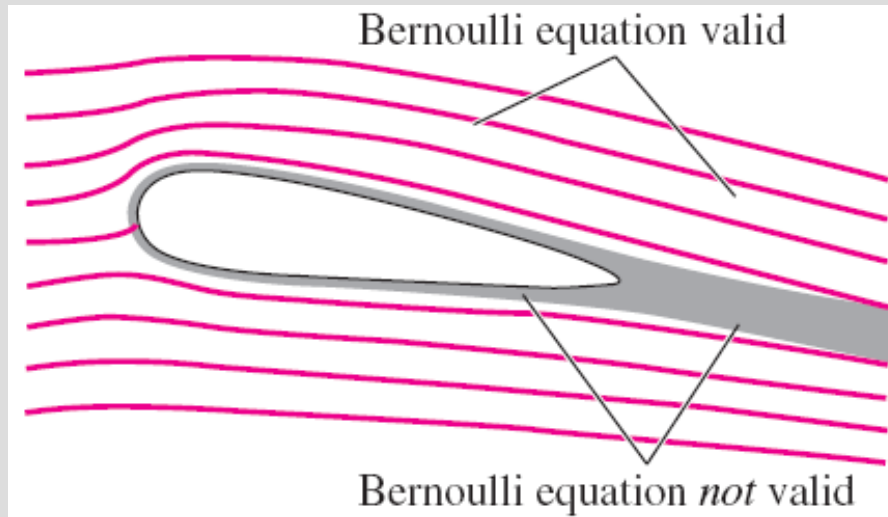
*İrdeleme: Kuşkusuz bu sonuç bu ve bir duvar saati sarkacının salınım hareketi benzeri başka prosesler için enerjinin korunumu denkleminin daha sezgisel ve uygun bir formudur.*

## 5-4 ■ BERNOULLI DENKLEMİ

**Bernoulli denklemi:** Basınç, hız ve yükseklik arasındaki ilişkiyi temsil eden yaklaşık bir bağıntıdır ve net sürtünme kuvvetlerinin ihmal edilebilir olduğu daimi, sıkıştırılamaz akış bölgelerinde geçerlidir.

Basitliğine rağmen, akışkanlar mekaniğinde çok güçlü bir araç olduğu kanıtlanmıştır.

Bernoulli yaklaşımı genellikle, akış hareketinin basınç ve yer çekimi kuvvetlerinin birleşik etkileri ile yönlendirildiği, sınır tabakaları ve art izleri dışında kalan akış bölgelerinde kullanışlıdır.



Bernoulli denklemi, sadece net viskoz kuvvetlerin atalet, yerçekimi veya basınç kuvvetlerine oranla ihmal edilebilecek derecede küçük olduğu viskoz olmayan akış bölgelerinde geçerli olan temsili bir denklemdir. Bu tür bölgeler, sınır tabaka ve art izlerinin dışında görülür.



# Bir akışkan parçacığının ivmesi

İki-boyutlu akışta ivme, bir akım çizgisi boyunca

**akım yönü (teğetsel) ivmesi  $a_s$**  ve

akım çizgisine dik yöndeki **normal ivme  $a_n$**  ( $a_n = V^2/R$ ) olarak ikiye ayrılabilir.

Akım yönü ivmesinin alam çizgisi boyunca hızın büyüklüğündeki, dik ivmenin ise hızın yönündeki değişimden kaynaklanır.

Düz bir yörünge boyunca hareket eden parçacıklar için, eğrilik yarıçapı sonsuz olduğundan ve bu yönde herhangi bir değişim meydana gelmediğinden  $a_n = 0$  olur.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

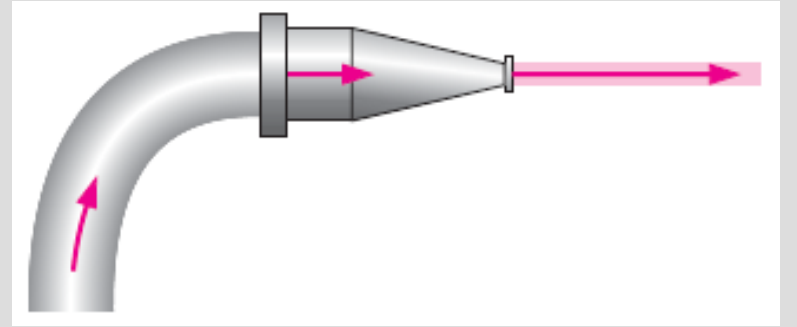
$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$V = V(s)$$

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} V = V \frac{dV}{ds}$$

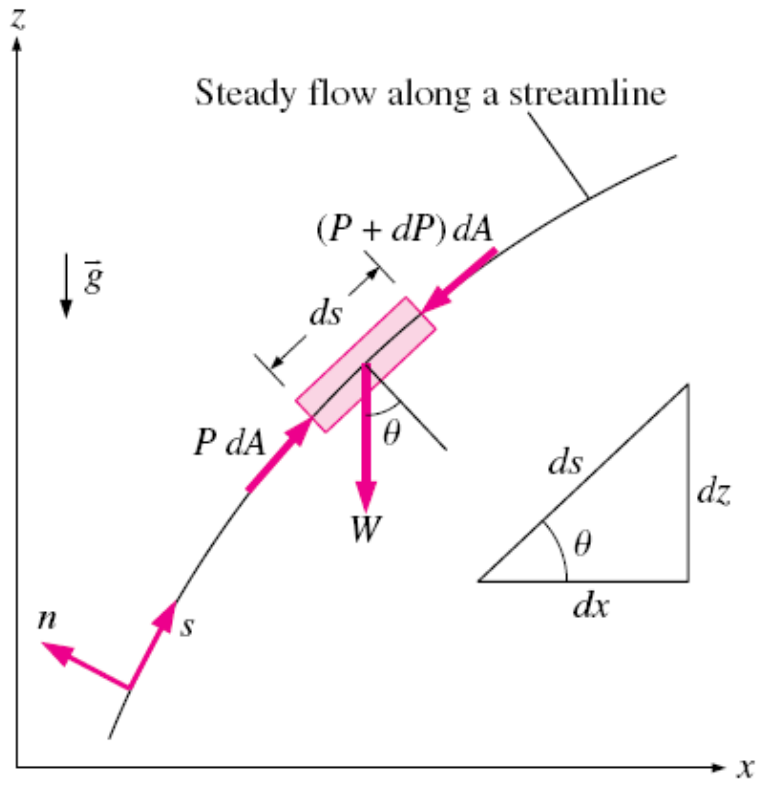
$$V = ds/dt$$

Daimi akışta ivmenin  
hıza bağlı değişimi



Daimi akış esnasında, bir akışkan sabit bir noktada zamanla ivmelenmese de konumuna bağlı olarak ivmelenebilir.

# Bernoulli denkleminin türetilmesi



$$\sum F_s = ma_s \quad P dA - (P + dP) dA - W \sin \theta = mV \frac{dV}{ds}$$

$$m = \rho V = \rho dA ds \quad W = mg = \rho g dA ds$$

$$\sin \theta = dz/ds. \quad -dP dA - \rho g dA ds \frac{dz}{ds} = \rho dA ds V \frac{dV}{ds}$$

$$-dP - \rho g dz = \rho V dV \quad V dV = \frac{1}{2} d(V^2)$$

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} d(V^2) + g dz = 0$$

**Daimi akış:**

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant (along a streamline)}$$

**Daimi sıkıştırılamaz akış:**

**Bernoulli denklemi**

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant (along a streamline)}$$

**Aynı akım çizgisi üzerindeki herhangi iki nokta için Bernoulli denklemi:**

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Bir akışkan parçasına akım çizgisi boyunca etkiyen kuvvetler

Sıkıştırılabilirlik ve sürtünme etkileri ihmal edildiğinde, bir akışkan parçasının bir akım çizgisi boyunca daimi akışı sırasında, kinetik, potansiyel ve akış enerjilerinin toplamı sabit kalır.

(Steady flow along a streamline)

General:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant}$$

Incompressible flow ( $\rho = \text{constant}$ ):

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant}$$

Bernoulli denklemi sıkıştırılamaz akış kabulüyle çıkarılmıştır ve bu yüzden önemli sıkıştırılabilirlik etkilerinin bulunduğu akışlar için kullanılmamalıdır.

The diagram shows the Bernoulli equation  $\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant}$  on a black background. Three labels with white text and thin white lines pointing to the terms are: 'Flow energy' pointing to  $\frac{P}{\rho}$ , 'Potential energy' pointing to  $gz$ , and 'Kinetic energy' pointing to  $\frac{V^2}{2}$ .

Bernoulli denklemi, bir akışkan parçacığının bir akım çizgisi boyunca daimi akışı esnasında kinetik, potansiyel ve akış enerjilerinin toplamının sabit kaldığını ifade eder.

- Bernoulli denklemi “mekanik enerji dengesi” olarak ele alınabilir
- Mekanik enerjinin ısı enerjisiye ya da ısı enerjinin mekanik enerjiye dönüşümünü içermeyen sistemler için genel enerjinin korunumu ilkesinin eşdeğeridir ve bu şekilde mekanik ve ısı enerjisi ayrı ayrı korunur.
- Bernoulli denklemi sürtünmenin ihmal edildiği daimi, sıkıştırılamaz akış esnasında mekanik enerjinin farklı formlarının birbirlerine dönüştüğünü, ancak toplamlarının her zaman sabit kaldığını ifade eder.
- Bu tür akışlarda mekanik enerjiyi duyulur ısı (iç) enerjiye dönüştüren sürtünme olmadığından mekanik enerji yitimi yoktur.
- Türetilmesinde pek çok sınırlayıcı yaklaşımların yapılmasına rağmen, Bernoulli denklemi ile birçok uygulamalı akış problemi kabul edilebilir bir hassasiyetle çözümlenebildiği için, bu denklem uygulamada yaygın olarak kullanılır.

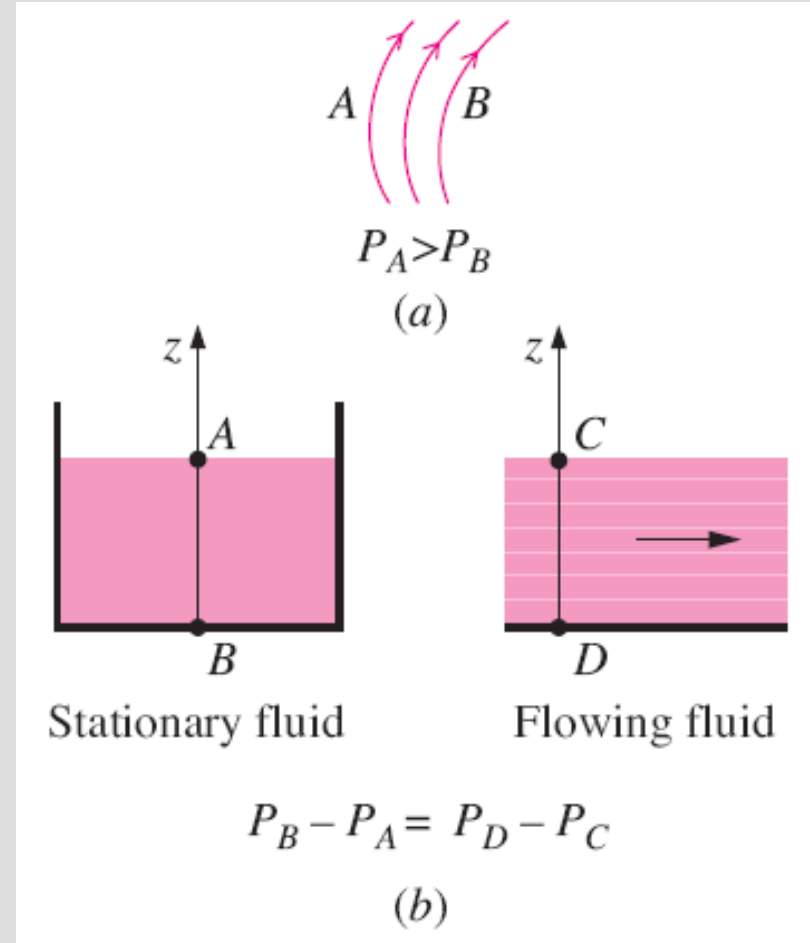
# Akım çizgilerine dik yönde kuvvet dengesi

Daimi ve sıkıştırılmaz akış için, akım çizgisine *dik yöndeki* ( $n$ -yönü) kuvvet dengesinden;

$$\frac{P}{\rho} + \int \frac{V^2}{R} dn + gz = \text{constant} \quad (\text{across streamlines})$$

Düz bir çizgi boyunca olan akış için,  $R \rightarrow \infty$  ve  $P/\rho + gz = \text{constant}$ 'dir. Sabit ya da durgun bir akışkan kütlesi için düşey mesafe ile hidrostatik basıncın değişimini gösteren  $P = -\rho gz + \text{constant}$  şekline indirgenir.

Düz bir akım çizgisi boyunca olan daimi, sıkıştırılmaz akıştaki basıncın yükseklikle değişimi, durgun akışkandaki gibidir (Ancak akış eğrisel bir yörünge izliyorsa bu durum geçerli değildir).



# Daimi olmayan sıkıştırılabilir akış

*Daimi olmayan sıkıştırılabilir akış için Bernoulli denklemi:*

$$\text{Unsteady, compressible flow: } \int \frac{dP}{\rho} + \int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant}$$

# Statik, Dinamik ve Durma Basınçları

Bernoulli denklemi, bir akışkan parçacığının bir akım çizgisi boyunca daimi akışı esnasında akış, kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplamının sabit kaldığını ifade eder. Bu nedenle, akış esnasında akışkanın kinetik ve potansiyel enerjileri akış enerjisine dönüşerek (ya da tam tersi) basınç değişimine neden olabilir.

Bernoulli denklemindeki her bir terim yoğunluk  $\rho$  ile çarpılırsa;

$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{constant (along a streamline)}$$

$P$  statik basınçtır (dinamik etkileri içermez); akışkanın gerçek termodinamik basıncını ifade eder ve termodinamik ve özellik tablolarında kullanılan basınçla aynıdır.

$\rho V^2/2$  dinamik basınçtır; hareket halindeki bir akışkan izentropik olarak durmaya zorlandığında akışkanda meydana gelen basınç artışı ifade eder.

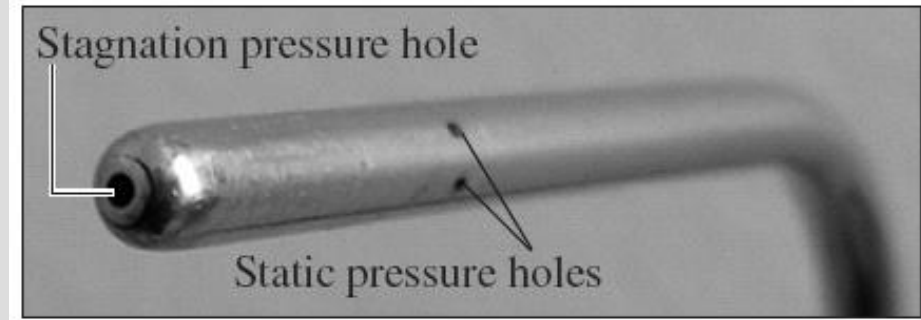
$\rho gz$  hidrostatik basınçtır, değeri seçilen referans seviyesine bağlı olduğundan tam anlamıyla belirli bir basıncı ifade etmez, yükseldiğin yani akışkan ağırlığının basınç üzerindeki etkilerini hesaba katar.

Statik, dinamik ve hidrostatik basınçların toplamı **toplam basınç** olarak adlandırılır. Bu yüzden, Bernoulli denklemi **bir akım çizgisi boyunca toplam basıncın sabit kaldığını** belirtir.

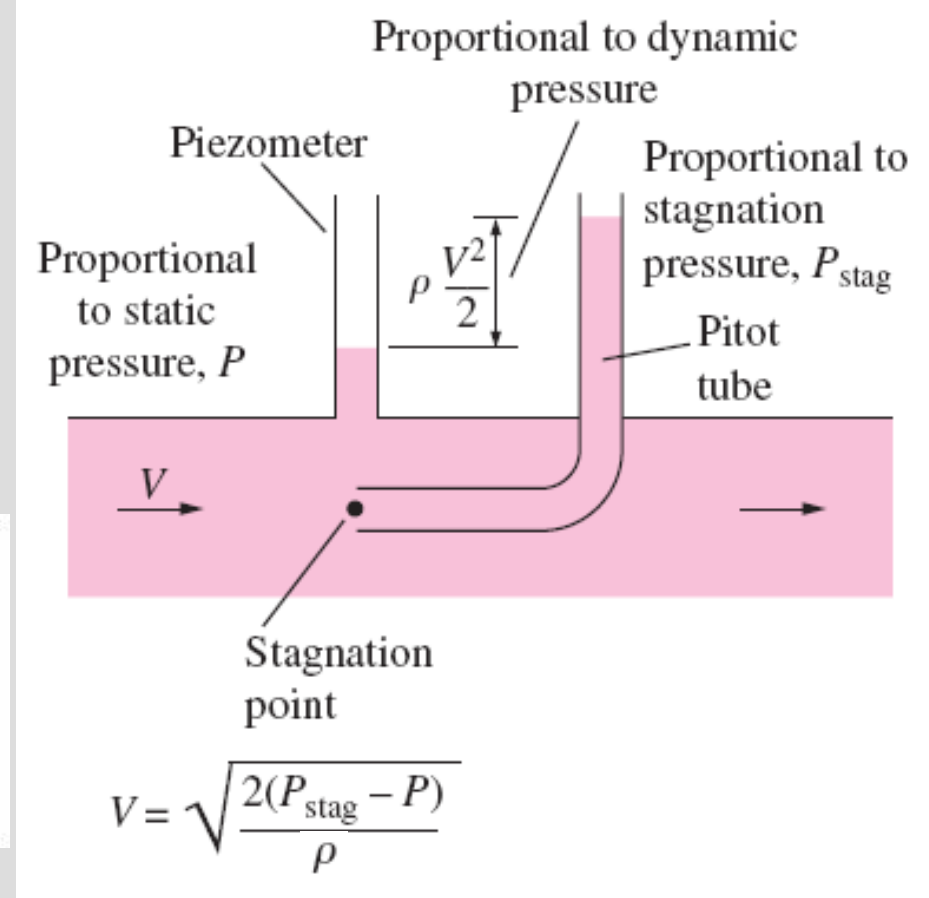
**Durma Basıncı:** akış içerisindeki bir noktada akışkanı izentropik olarak durmaya zorlayan basıncı ifade eder.

$$P_{\text{stag}} = P + \rho \frac{V^2}{2} \quad (\text{kPa})$$

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{\text{stag}} - P)}{\rho}}$$

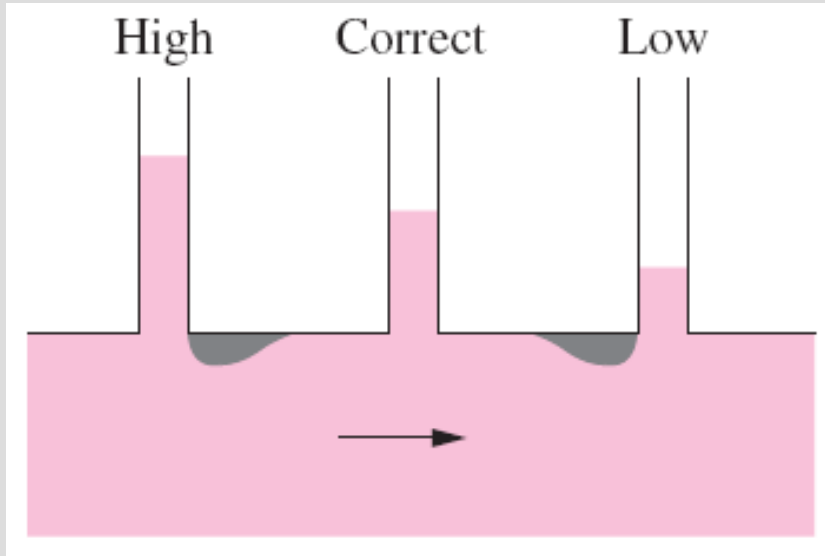


Bir **Pitot-statik tüpünün** yakından çekilen fotoğrafı: Durma basıncı deliği ile beş çevresel statik basınç deliğinden ikisi görülmektedir.

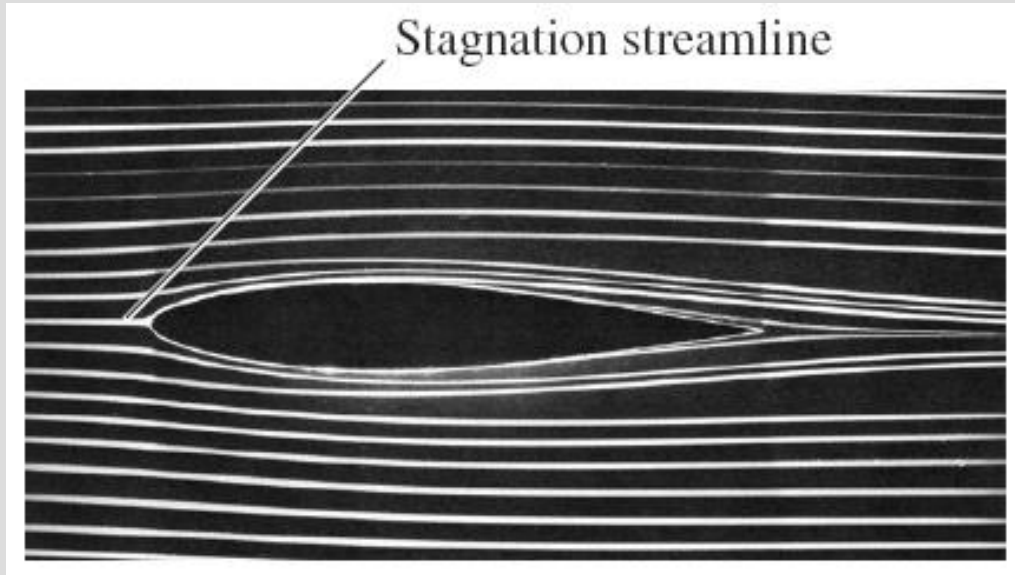


**Piezometre tübü Statik, dinamik ve durma basınçları.**





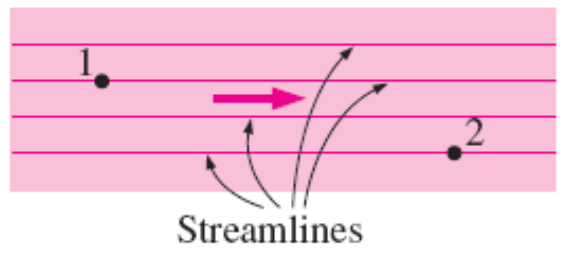
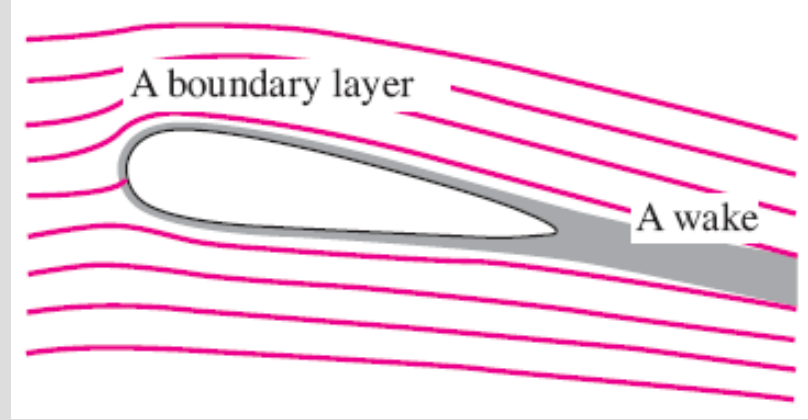
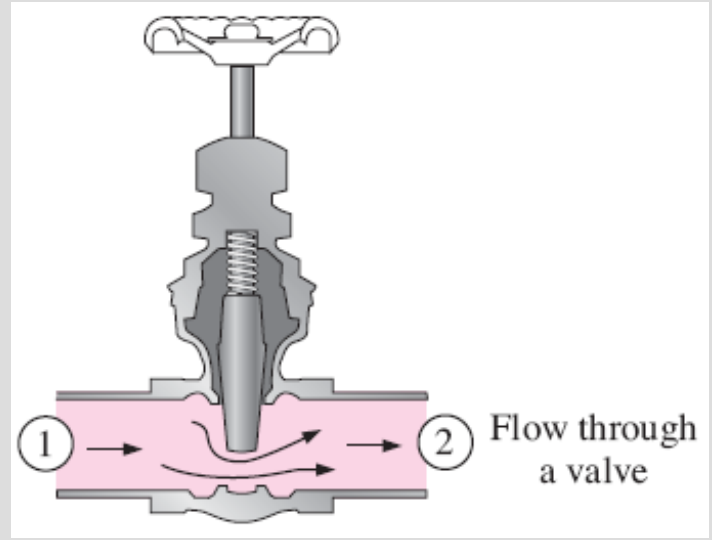
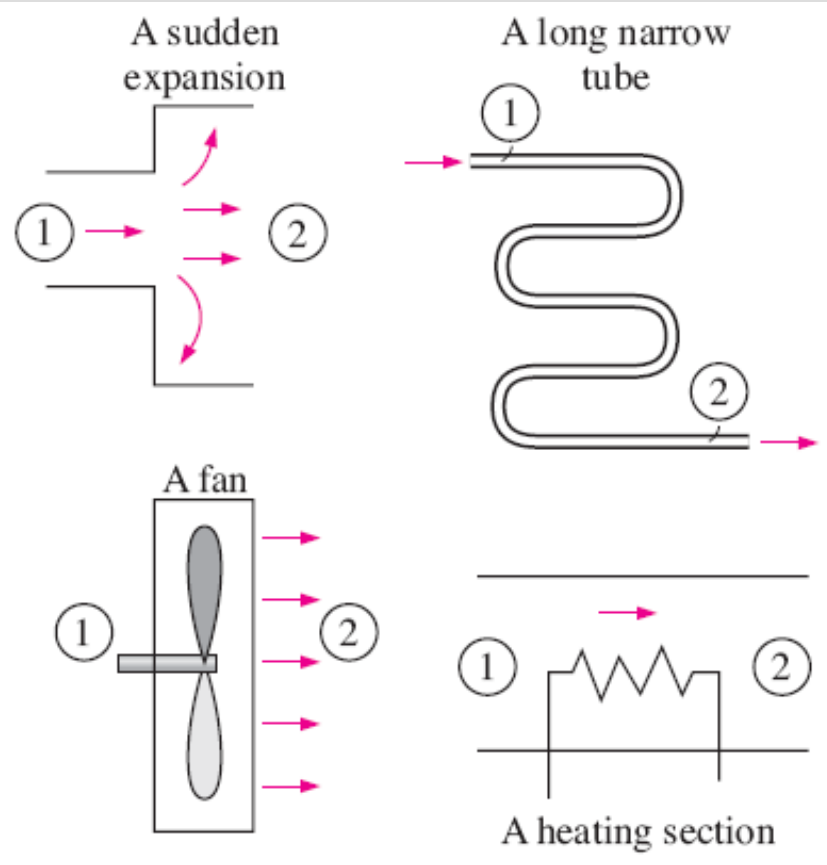
Özen gösterilmeden açılan bir statik basınç deliği, statik basıncın yanlış okunmasıyla sonuçlanabilir.



Renklendirilmiş akışkan ile bir kanadın yukarı akımda oluşturulan çıkış çizgileri: akış daimi olduğunda çıkış çizgileri, akım çizgileri ve yörünge çizgileriyle aynıdır. Şekilde durma akım çizgisi gösterilmiştir.

# Bernoulli denkleminin kullanımındaki kısıtlamalar

- 1. Daimi akış:** Bernoulli denklemi sadece daimi akışa uygulanabilir.
- 2. Sürtünmesiz akış:** Ne kadar küçük olursa olsun her akışta bir miktar sürtünme vardır ve sürtünme etkileri ihmal edilebilir veya edilemez.
- 3. Mil işinin olmaması:** Bernoulli denklemi bir akım çizgisi boyunca hareket eden akışkan parçacığı üzerine uygulanan kuvvet dengesinden türetilmiştir. Bu yüzden Bernoulli denklemi pompa, türbin, fan ya da başka bir makine ya da çark gibi akım çizgilerinin bozulmasına neden olan ve akışkan parçacıklarıyla enerji etkileşimine giren makinelerin bulunduğu akış kesimlerinde uygulanamaz. Göz önüne alınan akış kesiminde bu makinelerin bulunması durumunda, mil işi giriş çıkışını hesaba katmak için bunun yerine enerji denklemi kullanılmalıdır.
- 4. Sıkıştırılmaz akış:** Bernoulli denkleminin türetilirken yoğunluk sabit alınır. Bu şart, sıvılarda ve ayrıca Mach sayısı 0.3 'ten küçük olan gazlarda sağlanır.
- 5. Isı geçişinin olmaması:** Gazın yoğunluğu sıcaklıkla ters orantılıdır ve bu nedenle Bernoulli denklemi ısıtma ve soğutma kesimleri gibi önemli oranda sıcaklık değişimlerinin söz konusu olduğu akış bölgelerinde kullanılmamalıdır.
- 6. Bir akım çizgisi boyunca akış:** Kelimenin tam anlamıyla Bernoulli denklemi bir akım çizgisi boyunca uygulanabilir ve C sabiti, genellikle farklı akım çizgileri için farklı değerler alır. Fakat, akış bölgesinin dönümsüz olduğu ve bu nedenle çevrilirinin oluşmadığı akış alanlarında C sabitinin değeri tüm akım çizgileri için aynı kalır.



Bir akış kesiminde akım çizgili yapıyı bozarak Bernoulli denklemini geçersiz kılan elemanlar ve sürtünme etkileri

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Akış dönümsüz ise, Bernoulli denklemi akım boyunca herhangi iki nokta arasında (sadece aynı akım çizgisinde değil) uygulanabilir hale gelir.

# Hidrolik Eğim Çizgisi (HGL) and Enerji Eğim Çizgisi (EGL)

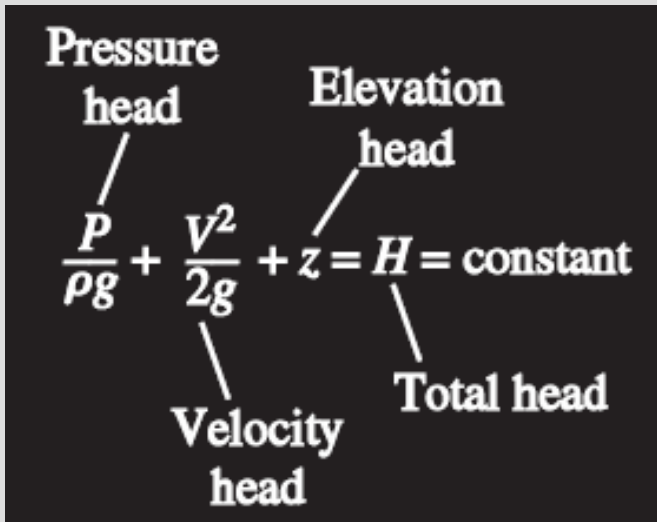
Mekanik enerji seviyesini, genelde Bernoulli denklemindeki farklı terimlerin görselleştirilmesini kolaylaştırmak için *yükseklikleri* kullanarak grafikte gösteririz. Bu, Bernoulli denklemindeki her bir terimi g'ye bölmek suretiyle gerçekleştirilir:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constant} \quad (\text{along a streamline})$$

**$P/\rho g$  basınç yükü;**  $P$  statik basıncını meydana getiren akışkan sütunu yüksekliğini temsil eder.

**$V^2/2g$  hız yükü;** akışkanın sürtünmesiz serbest düşmesi sırasında  $V$  hızına ulaşması için gerekli olan yüksekliği temsil eder.

**$z$  yükseklik yükü;** akışkanın potansiyel enerjisini temsil eder.



Bernoulli denkleminin bir alternatif formu da yükler cinsinden ifade edilir: Bir akım çizgisi boyunca basınç, hız ve yükseklik yüklerinin toplamı sabittir.



## HGL ve EGL üzerine notlar

Su depolan ve göller gibi durgun haldeki kütlelerde EGL ve HGL sıvının serbest yüzeyi ile çakışır. Böyle durumlarda serbest yüzeyin yüksekliği  $z$ , hız ve statik basınç (etkin basınç) sıfır olduğundan, hem EGL hem de HGL'yi gösterir.

EGL her zaman HGL'nin  $V^2/2g$ 'lik düşey mesafe kadar üzerinde olur. Bu iki çizgi hız azaldıkça birbirlerine yaklaşır ve hız arttıkça birbirlerinden uzaklaşır. Hız arttıkça HGL'nin yüksekliği azalır ve tam tersi şekilde hız azaldıkça HGL'nin yüksekliği artar.

İdealleştirilmiş Bernoulli-tipi o/afta, EGL yataydır ve yüksekliği değişmeden sabit kalır. Akış hızı sabit olduğunda HGL de yine aynı şekilde sabit kalır.

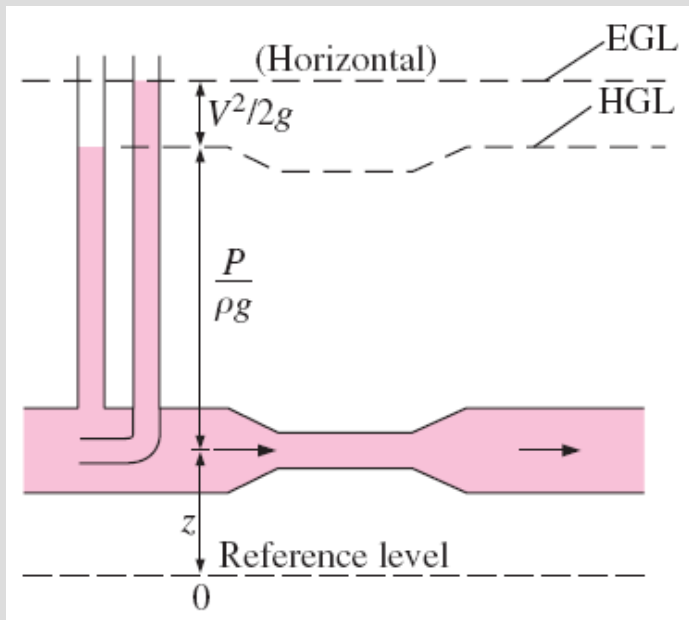
Açık-kanal akışında HGL sıvının serbest yüzeyi ile çakışır ve EGL,  $V^2/2g$ 'lik düşey mesafe kadar serbest yüzeyin üzerindedir.

Boru çıkışında basınç yükü sıfırdır (atmosferik basınç) ve bu nedenle HGL boru çıkışı ile çakışır

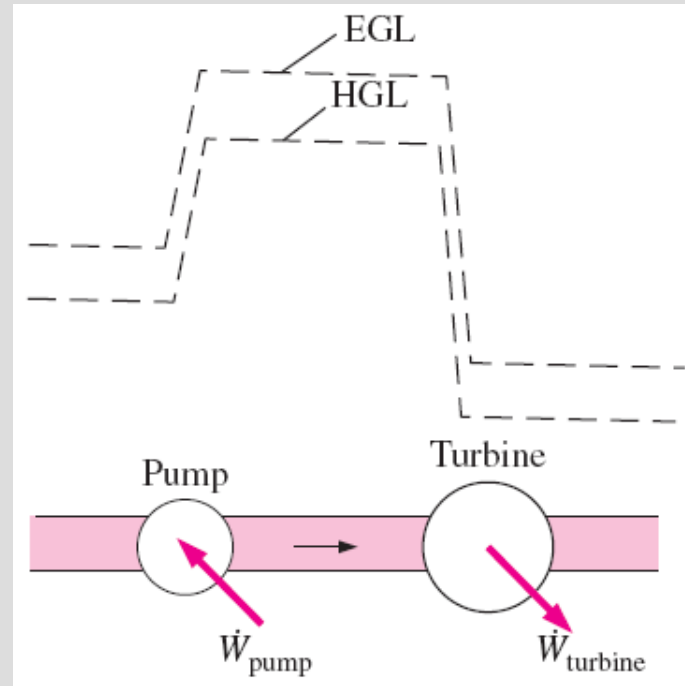
Sürtünme etkileri sonucunda (ısı enerjisi dönüşümü ile) oluşan mekanik enerji kayıpları, EGL ve HGL'nin akış yönünde aşağı doğru eğim kazanmasına neden olur. Eğim boru içerisindeki yük kaybını verir.

Bir vana gibi önemli oranda sürtünme etkisi meydana getiren bir eleman, o noktada EGL ve HGL'de ani düşüşe neden olur.

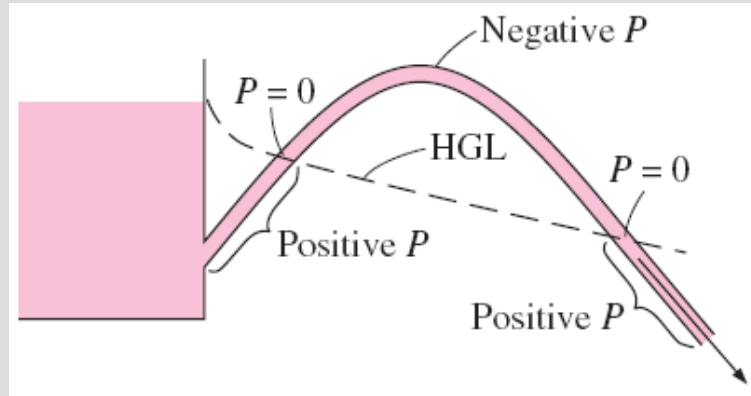
Ne zaman akışkana mekanik enerji verilse, EGL ve HGL'de dik bir sıçrama gözlenir. Yine aynı şekilde, ne zaman akışkandan mekanik enerji çekilse (örneğin bir türbin ile) EGL ve HGL'de dik bir düşüş gözlenir.



İdealleştirilmiş Bernoulli-tipi bir akışta EGL yataydır ve yüksekliği sabit kalır. Ancak, eğer akış hızı akış boyunca değişiyorsa HGL için aynı durum söz konusu değildir.

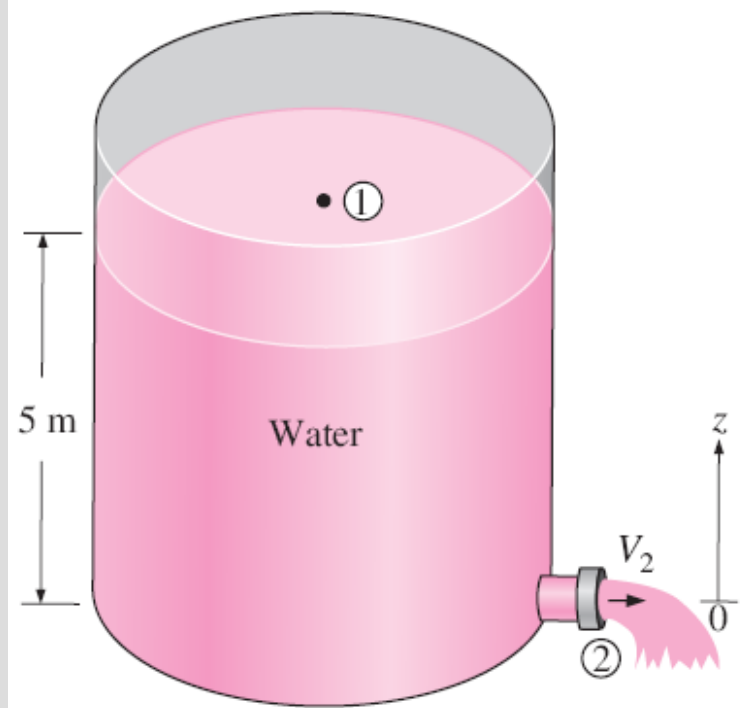


Bir pompayla akışkana mekanik enerji verildiğinde EGL'de ve HGL'de *dik bir sıçrama*, bir türbin ile akışkandan mekanik enerji çekildiğinde ise EGL'de ve HGL'de *dik bir düşüş* meydana gelir.



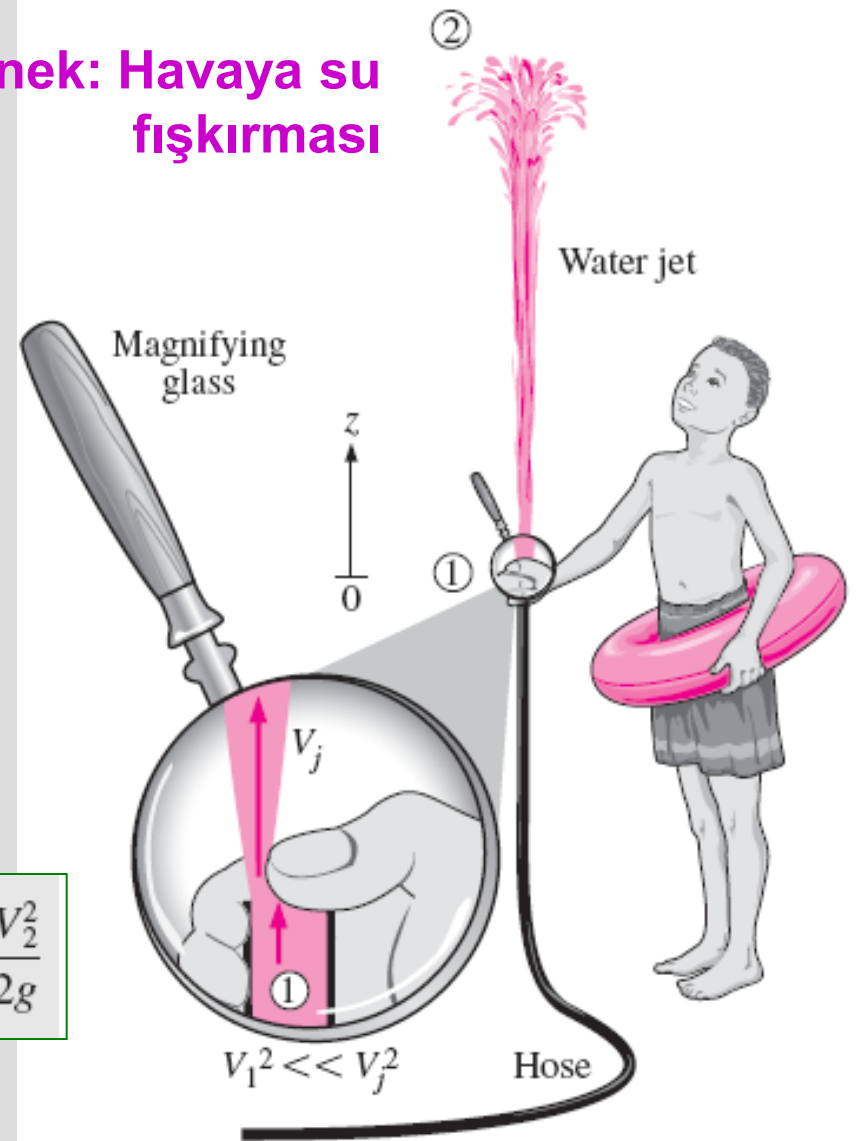
HGL'nin akışkanla *kesiştği yerlerde akışkanın (etkin) basınç sıfırdır ve HGL'nin üzerinde kalan akış kesimlerinde basınç negatiftir (vakum basıncı).*

## Örnek: Büyük bir tanktan su boşaltımı



$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \approx 0 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \rightarrow z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

## Örnek: Havaya su fişkırması

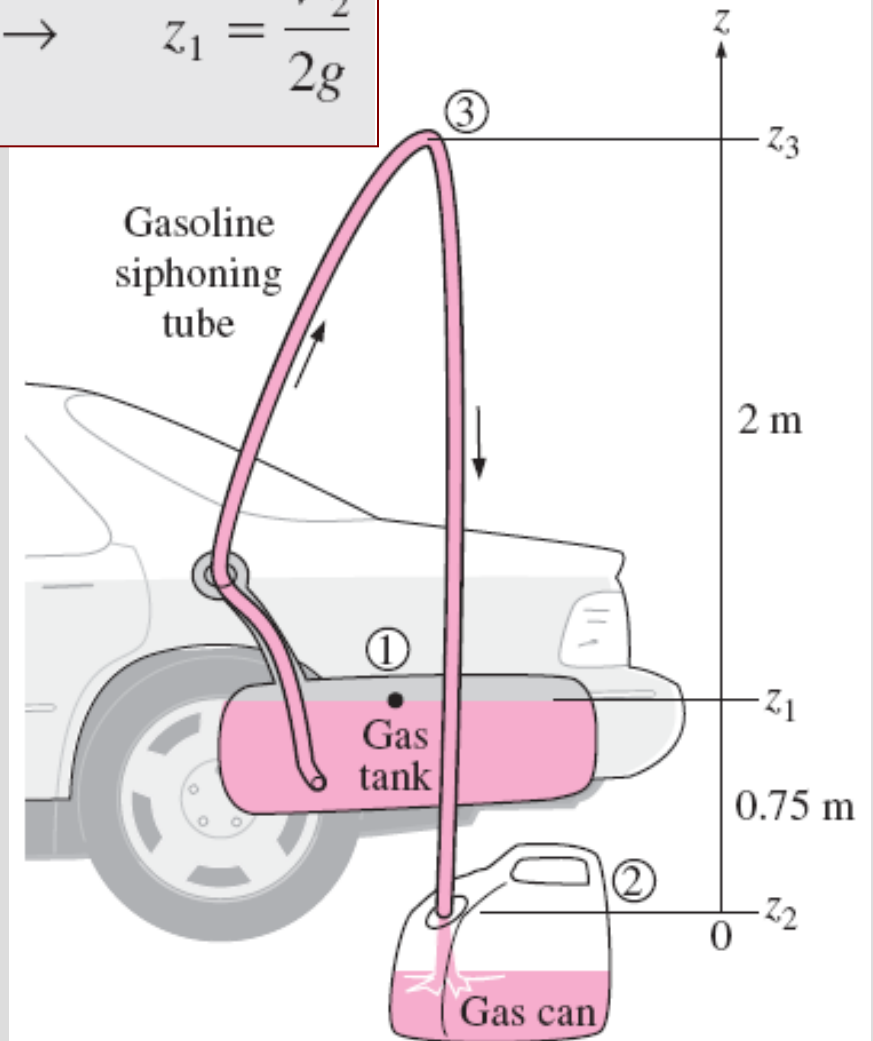


$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \approx 0 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \rightarrow \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} + z_2$$



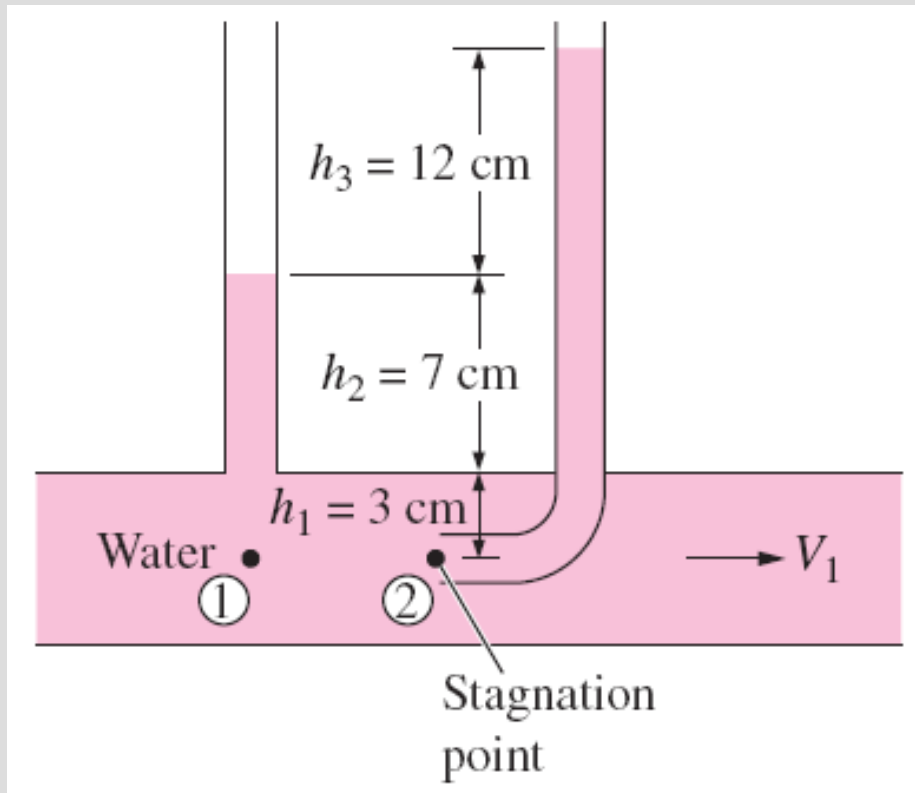
$$\frac{\cancel{P_1}}{\cancel{\rho g}} + \frac{V_1^2}{2g} \overset{\approx 0}{\rightarrow} + z_1 = \frac{\cancel{P_2}}{\cancel{\rho g}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \overset{0}{\rightarrow} \rightarrow z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

Örnek: Yakıt tankından benzin çekilmesi



$$\frac{\cancel{P_2}}{\cancel{\rho g}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \overset{0}{\rightarrow} = \frac{\cancel{P_3}}{\cancel{\rho g}} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 \rightarrow \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{P_3}{\rho g} + z_3$$

## Örnek: Pitot tübüyle hız ölçümü

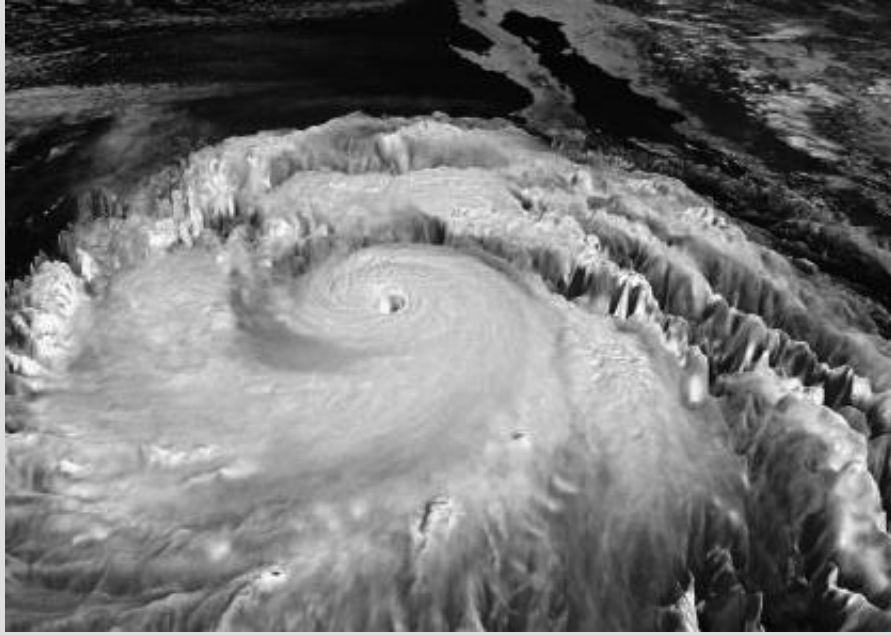


$$P_1 = \rho g(h_1 + h_2)$$

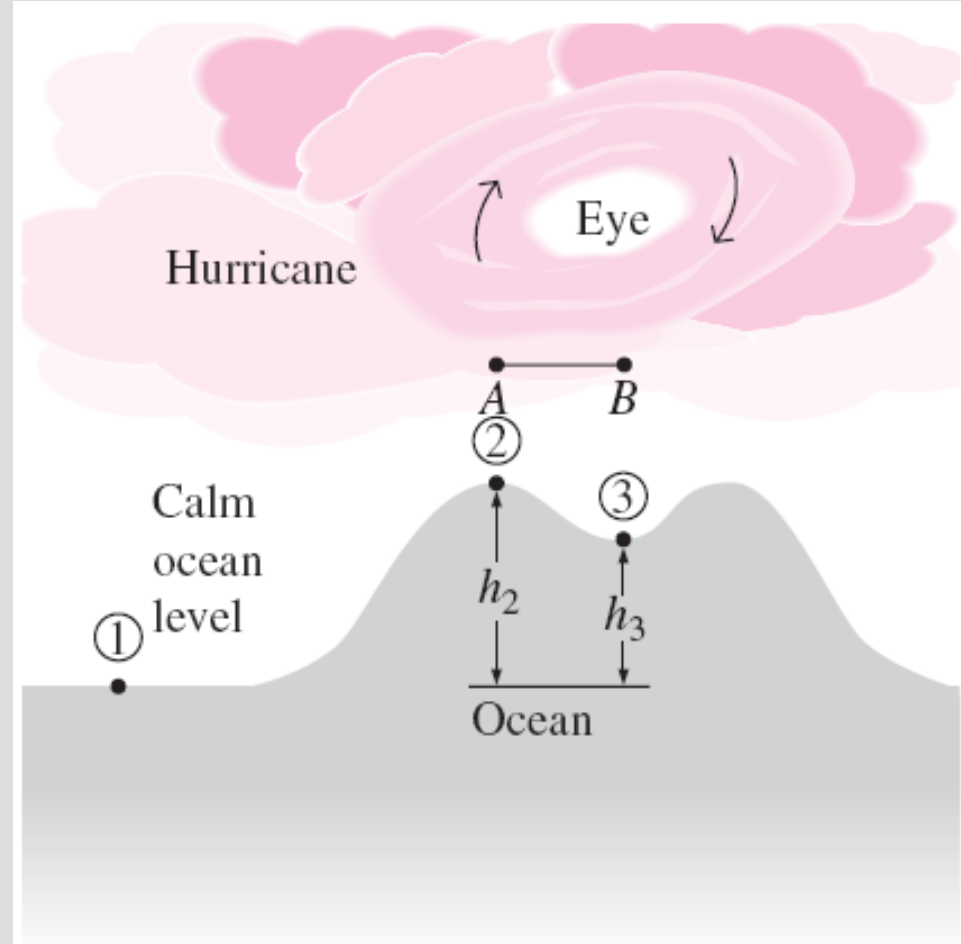
$$P_2 = \rho g(h_1 + h_2 + h_3)$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2} \rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g}$$

## Örnek: Kasırga sebebiyle okyanus sularındaki yükselme



Linda kasırgasının gözü (1997 Pasifik okyanusun da Baja California yakını) uydu fotoğrafında açıkça görülebilir.



$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + \cancel{z_A} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + \cancel{z_B} \rightarrow \frac{P_B - P_A}{\rho g} = \frac{V_A^2}{2g}$$

## Örnek 5.10: Sıkıştırılabilir Akış için Bernoulli Denklemi

Sıkıştırılabilirlik etkilerini dikkate alarak (a) *izotermal* ve (b) *izentropik hal değişimine uğrayan bir ideal gazın Bernoulli denklemini türetiniz.*

ÇÖZÜM İzotermal ve izentropik hal değişimine uğrayan bir ideal gazın sıkıştırılabilir akışı için Bernoulli denklemi türetilecektir.

Kabuller: 1) Akış.daimidir ve sürtünme etkileri ihmal edilebilir 2) Akışkan bir ideal gazdır, dolayısıyla  $P = \rho RT$  bağıntısı kullanılabilir. 3) izentropik hal değişimi sırasında özgül ısılar sabittir ve dolayısıyla değişim sırasında  $P/\rho =$  sabittir.

Analiz: (a) Sıkıştırılabilirlik etkileri önemli olduğunda ve akış sıkıştırılmaz olarak kabul edilemediğinde Bernoulli denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant} \quad (\text{along a streamline}) \quad (1)$$

Sıkıştırılabilirlik etkileri yoğunluğu ( $\rho$ ), basınca bağlı olarak ifade ederek ve Denklem 1'deki  $dP/\rho$  integralini alarak uygun şekilde hesaba katılabilir. Ancak, bunun için  $P$  ve  $\rho$  arasında bir bağıntı kurmak gerekir. Bir ideal gazın *izotermal olarak genişmesi ya da sıkışması durumu için, sıcaklık  $T =$  sabit olmak üzere,  $\rho = P/RT$ 'yi denklemden yerine koyarak, Denklem 1 kolayca integre edilebilir:*

$$\int \frac{dP}{\rho} = \int \frac{dP}{P/RT} = RT \ln P$$

Bu bağıntıyı Denklem 1'de yerine koyarsak istenen bağıntı bulunmuş olur. *İzotermal hal değişimi*

$$RT \ln P + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant} \quad (2)$$

(b) Sıkıştırılabilir akışın uygulamada yaygın olan bir başka örneği de, *ideal gazların, lüleler, yayıcılar ve türbin kanatlarındaki dar geçitler gibi; yüksek hızlı akışın, görüldüğü makinelerde karşılaşılan izentropik akışıdır, izentropik: (tersinir ve adyabatik) akış bu makinelerde ele alınabilir ve  $P/\rho^k = C = \text{sabit}$  bağıntısıyla tanımlanır. Burada,  $k$  gazını; özgül ısı oranıdır.  $P/\rho^k = C$  bağıntısından  $\rho$ 'yu çekersek;  $\rho = C^{-1/k} P^{1/k}$  elde edilir.  $dP/\rho$  için integral alınırsa,*

$$\int \frac{dP}{\rho} = \int C^{1/k} P^{-1/k} dP = C^{1/k} \frac{P^{-1/k+1}}{-1/k+1} = \frac{P^{1/k}}{\rho} \frac{P^{-1/k+1}}{-1/k+1} = \left( \frac{k}{k-1} \right) \frac{P}{\rho} \quad (3)$$

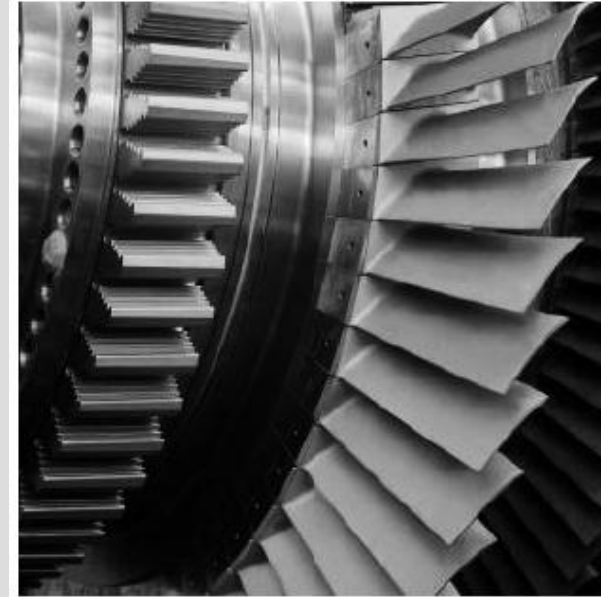
ve Denklem 1 'de yerine koyulursa, bir ideal gazın daimi izentropik ve sıkıştırılabilir akışı için Bernoulli denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

*izentropik akış:*

$$\left( \frac{k}{k-1} \right) \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant} \quad (4a)$$

veya

$$\left( \frac{k}{k-1} \right) \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \left( \frac{k}{k-1} \right) \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad (4b)$$



**FIGURE 5-45**

Compressible flow of a gas through turbine blades is often modeled as isentropic, and the compressible form of the Bernoulli equation is a reasonable approximation.

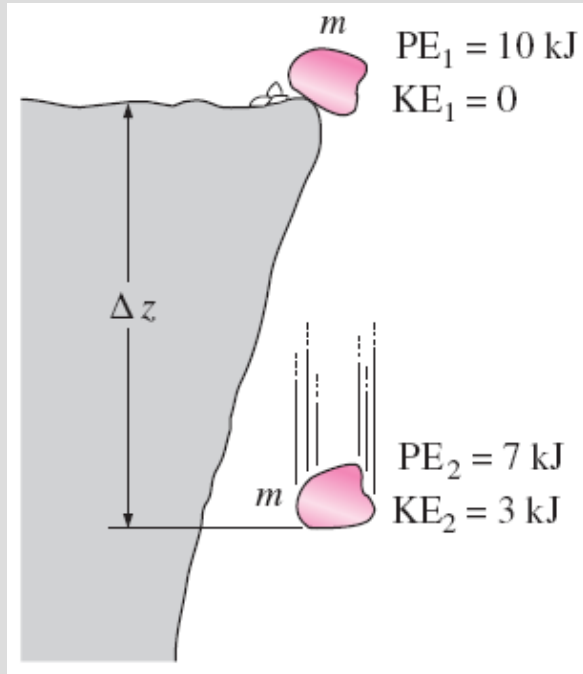
Bir gazın durma halinden (1 halindeki durma şartlarından) göz ardı edilebilecek kadar küçük bir yükseklik farkında ivmelenmesi uygulamada karşılaşılan yaygın bir durumdur. Bu durumda,  $z_1 = z_2$  ve  $V_1=0$ 'dır. İdeal gazlar için  $\rho = P/RT$ , izentropik akış için  $P/\rho^k = \text{sabit}$  vs  $c=\sqrt{kRT}$  ideal gazlar için yerel ses hızı olmak üzere Mach sayısının  $Ma = V/c$  şeklinde tanımlandığını göz önüne alarak denklem 4b aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\frac{P_1}{P_2} = \left[ 1 + \left( \frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}_2^2 \right]^{k/(k-1)} \quad (4c)$$

haline indirgenir. Burada, 1 hali durma hali, 2 hali ise akış boyunca herhangi bir haldir.

*İrdeleme: Mach sayısının 0.3'ten küçük olduğu durumlarda, sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz Bernoulli denklemlerinden elde edilen sonuçlar arasındaki farkın yüzde 2'den daha az olduğu görülmektedir. Bu yüzden, Ma 0.3 olduğu; durumlarda ideal gazların akışı sıkıştırılmaz olarak kabul edilebilir. Standart koşullardaki atmosferik havada bu, 100 m/s veya 360 km/h'lik akış hızına karşılık gelir.*

# 5-5 ■ GENEL ENERJİ DENKLEMİ



**Termodinamiğin birinci yasası (enerji korunumu prensibi):** Bir proses esnasında enerji yoktan var vardan yok edilemez; sadece form. değiştirir.

$$E_{in} - E_{out} = \Delta E.$$

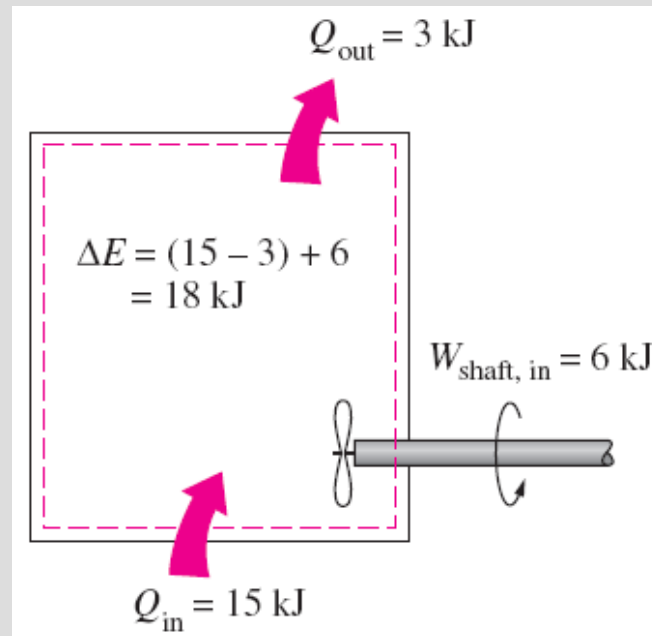
$$\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{net in} = \frac{dE_{sys}}{dt}$$

$$\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{net in} = \frac{d}{dt} \int_{sys} \rho e dV$$

$$\dot{Q}_{net in} = \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out}$$

$$\dot{W}_{net in} = \dot{W}_{in} - \dot{W}_{out}$$

$$e = u + ke + pe = u + \frac{V^2}{2} + gz$$



Bir proses esnasında sistemin enerji değişimi, sistem ile çevre arasındaki *net iş ve ısı geçişine eşittir.*

# Isı ile Enerji Geçişi

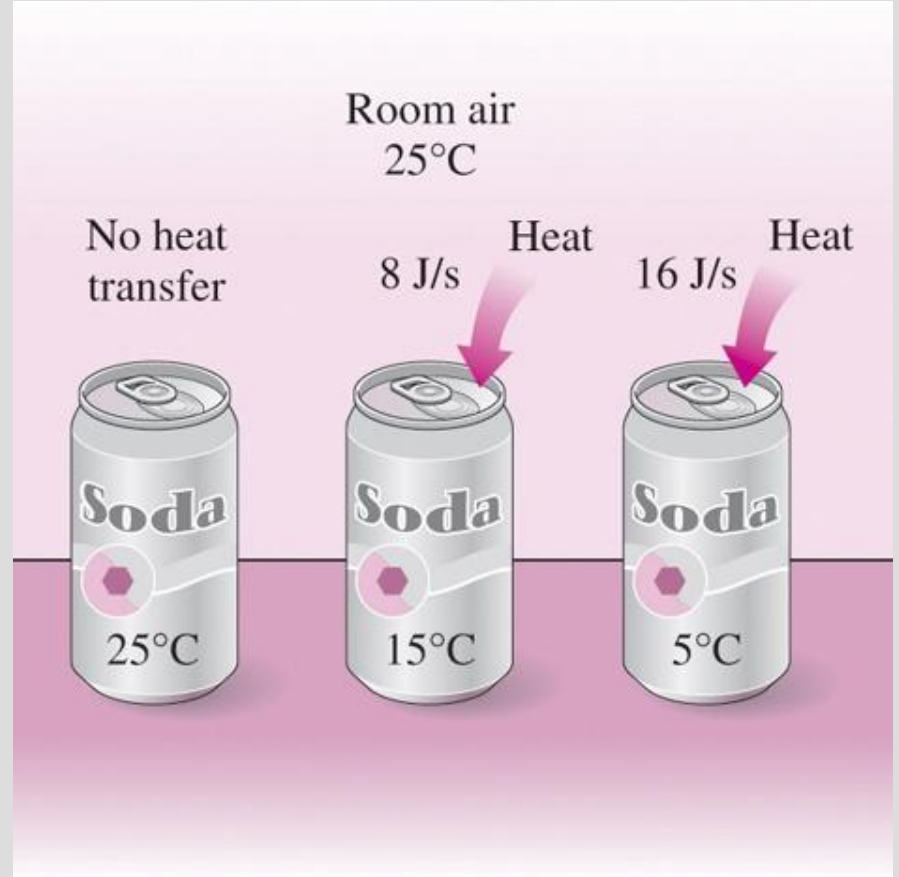
**Isı enerjisi:** Gizli iç enerji formlarının sahip oldukları enerji

**Isı geçişi:** Sıcaklık farkından dolayı, bir sistemden diğer bir sisteme olan ısı enerji geçişidir.

Isı geçişinin yönü her zaman yüksek sıcaklıktaki cisimden düşük sıcaklıktaki cisme doğrudur.

**Adyabatik proses:** Isı geçişinin olmadığı bir prosesdir.

**Isı geçiş hızı:** Birim zamanda ısı geçişi



Sıcaklık farkı ısı geçişini meydana getiren etkidir. Sıcaklık farkı arttıkça, ısı geçişinin hızı da artar.



# İş ile Enerji Geçişi

- Bir mesafe boyunca etki eden kuvvet ile meydana gelen enerji etkileşimine **iş** denir.
- Hareket halindeki bir piston, dönen bir mil, sistem sınırları içerisinde geçen bir elektrik teli, sistem ile çevre arasında bir iş etkileşiminin olduğunu gösterir.
- **Güç**: Birim zamanda yapılan iştir.
- Otomobil motorları hidrolik, buhar ve gaz türbinleri iş üretir; kompresörler, pompalar, fanlar ve karıştırıcılar iş tüketir.

$$W_{\text{total}} = W_{\text{shaft}} + W_{\text{pressure}} + W_{\text{viscous}} + W_{\text{other}}$$

$W_{\text{shaft}}$  Dönen milten aktarılan iş

$W_{\text{pressure}}$  Kontrol yüzeyi üzerinde basınç kuvvetleri tarafından yapılan iş

$W_{\text{viscous}}$  Kontrol yüzeyi üzerinde viskoz kuvvetlerin normal ve teğetsel bileşenlerinin yaptığı iş

$W_{\text{other}}$  Elektrik, Manyetik yüzey gerilimi gibi diğer kuvvetlerin yaptıkları iş

# Mil İşi

Tork  $T$ , uygulanan  $F$  kuvvetiyle a moment kolu  $r$ 'in çarpımına eşittir.

$$T = Fr \rightarrow F = \frac{T}{r}$$

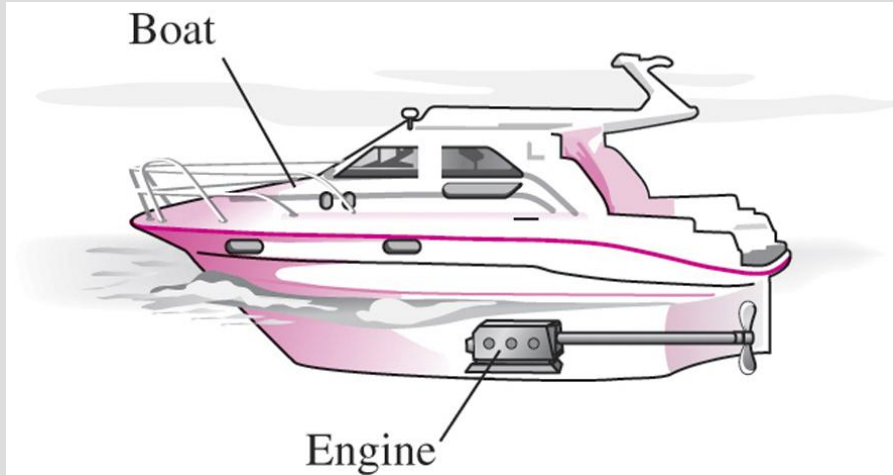
Bu kuvvet  $s$  mesafesi boyunca etkir  $s = (2\pi r)n$

$$\text{Mil İşi } W_{\text{sh}} = Fs = \left(\frac{T}{r}\right)(2\pi rn) = 2\pi nT \quad (\text{kJ})$$

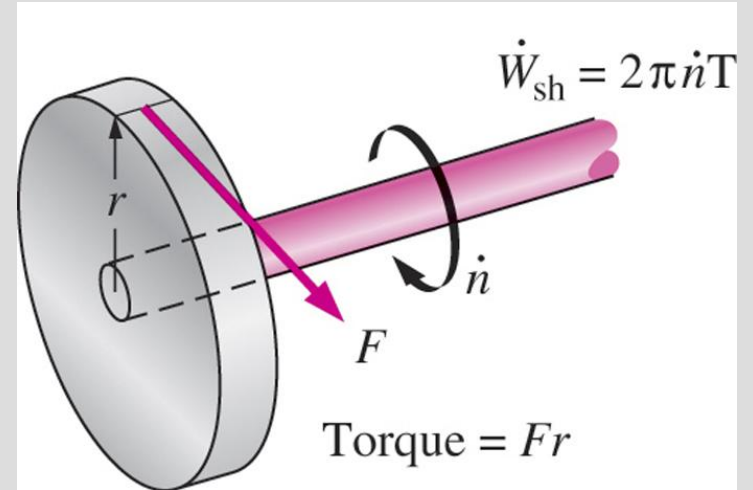
Mil ile aktarılan güç, birim zamandaki mil işidir.

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \omega T_{\text{shaft}} = 2\pi n \dot{T}_{\text{shaft}}$$

$$\dot{W}_{\text{sh}} = 2\pi n \dot{T} \quad (\text{kW})$$



Dönen mil ile enerji aktarımı



Mil işi, uygulanan tork ve dönme sayısı ile orantılıdır.

# Basınç kuvvetlerinin yaptıkları iş

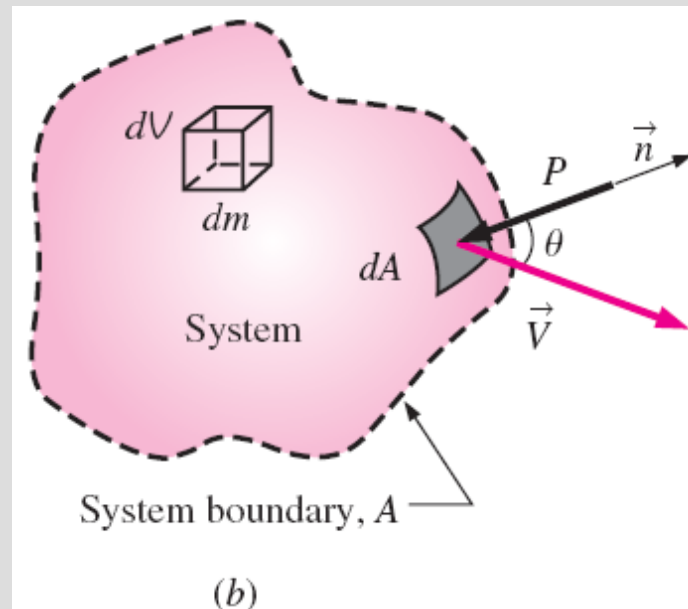
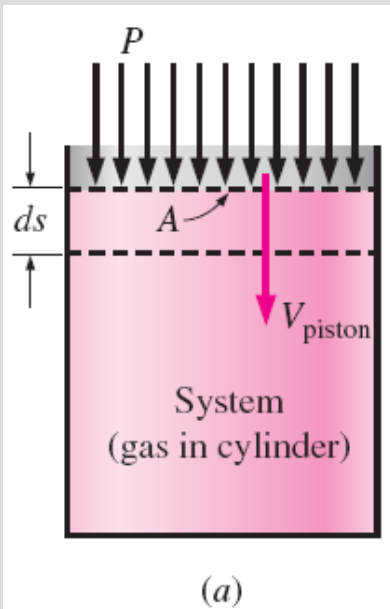
$$\delta W_{\text{boundary}} = PA \, ds.$$

$$\delta \dot{W}_{\text{pressure}} = \delta \dot{W}_{\text{boundary}} = PAV_{\text{piston}} \quad V_{\text{piston}} = ds/dt$$

$$\delta \dot{W}_{\text{pressure}} = -P \, dA \, V_n = -P \, dA(\vec{V} \cdot \vec{n})$$

$$\dot{W}_{\text{pressure, net in}} = - \int_A P(\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA = - \int_A \frac{P}{\rho} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$$

$$\dot{W}_{\text{net in}} = \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}} = \dot{W}_{\text{shaft, net in}} - \int_A P(\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$$



(a) Bir piston-silindir düzeneğindeki sistemin hareketli sınırına ve (b) gelişigüzel şekle sahip bir sistemin diferansiyel yüzey alanına etkiyen basınç kuvveti.

Enerjinin korunumu denklemi, Reynolds transport teoreminde  $E$  yerine  $e$  ve  $b$  yerine  $e$  koyarak elde edilir.

$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}} = \frac{dE_{\text{sys}}}{dt}$$

$$e = u + ke + pe = u + V^2/2 + gz$$

$$\frac{dE_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e\rho dV + \int_{\text{CS}} e\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dA$$

$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e\rho dV + \int_{\text{CS}} e\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dA$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Bir kontrol hacmine} \\ \text{birim zamanda} \\ \text{ısı ve iş geçişi} \\ \text{ile geçen net enerji} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Kontrol hacmi} \\ \text{içerisindeki} \\ \text{enerji miktarının birim} \\ \text{zamandaki değişimi} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Kütle akış ile} \\ \text{kontrol yüzeyinden} \\ \text{çıkan} \\ \text{net enerji debisi} \end{array} \right)$$

$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e\rho dV + \int_{\text{CS}} \left( \frac{P}{\rho} + e \right) \rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$

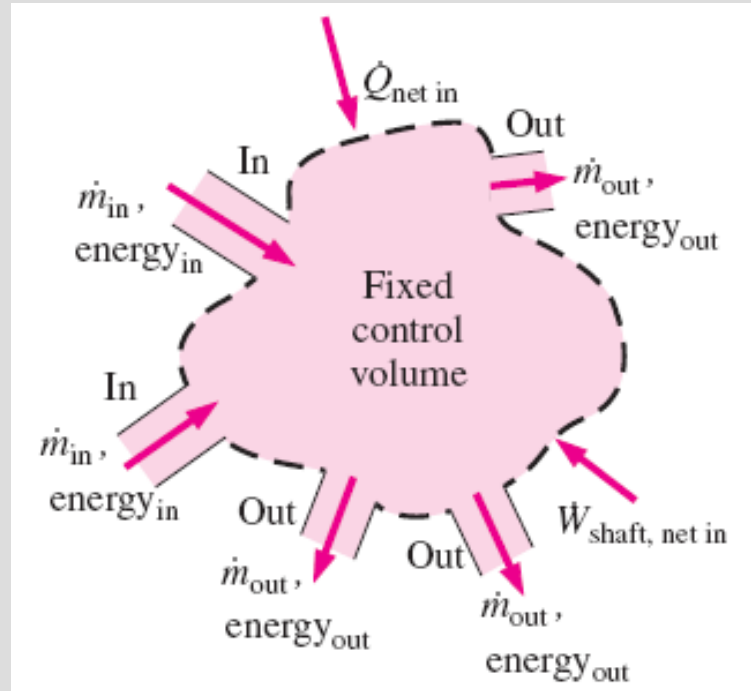
$$\text{Fixed CV: } \dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e\rho dV + \int_{\text{CS}} \left( \frac{P}{\rho} + e \right) \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} b\rho dV + \int_{\text{CS}} b\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$

$B = E$                        $b = e$                        $b = e$

$$\frac{dE_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e\rho dV + \int_{\text{CS}} e\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$

Tipik bir mühendislik probleminde, kontrol hacmi birçok giriş ve çıkışa sahip olabilir; enerji her girişten içeri ve her çıkıştan dışarı akar. Ayrıca, enerji kontrol hacmine net ısı geçişi ve net mil işi olarak da girer.



$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA_c$$

$$\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{shaft, net in} = \frac{d}{dt} \int_{CV} e\rho dV + \sum_{out} \dot{m} \left( \frac{P}{\rho} + e \right) - \sum_{in} \dot{m} \left( \frac{P}{\rho} + e \right)$$

$$e = u + V^2/2 + gz$$

$$\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{shaft, net in} = \frac{d}{dt} \int_{CV} e\rho dV + \sum_{out} \dot{m} \left( \frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{in} \dot{m} \left( \frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz \right)$$

$$\dot{Q}_{net in} + \dot{W}_{shaft, net in} = \frac{d}{dt} \int_{CV} e\rho dV + \sum_{out} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{in} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)$$

$$h = u + Pv = u + P/\rho$$

# 5-6 ■ DAİMİ AKIŞLARIN ENERJİ ANALİZİ

$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \sum_{\text{out}} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_{\text{in}} \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)$$

*Daimi akış esnasında bir kontrol hacmine ısı ve iş geçişleri ile birim zamanda olan net enerji geçişinin, kütle ile birlikte giren ve çıkan enerji akışı hızlarının farkına eşit olduğunu belirtir.*

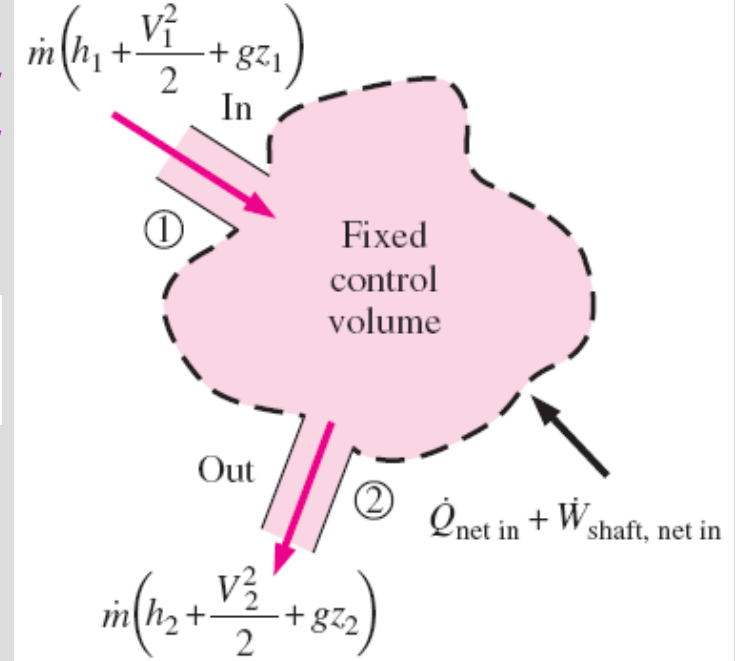
$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \dot{m} \left( h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right)$$

tek-akım cihazları

$$q_{\text{net in}} + w_{\text{shaft, net in}} = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

$$h = u + Pv = u + P/\rho$$

$$w_{\text{shaft, net in}} + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + (u_2 - u_1 - q_{\text{net in}})$$



Sadece tek giriş ve tek çıkışlı bir kontrol hacmi ve enerji etkileşimleri.

İdeal akış (mekanik enerji kaybı yok):

$$q_{\text{net in}} = u_2 - u_1$$

Gerçek akış (mekanik enerji kaybıyla):

$$e_{\text{mech, loss}} = u_2 - u_1 - q_{\text{net in}}$$

$$e_{\text{mech, in}} = e_{\text{mech, out}} + e_{\text{mech, loss}}$$

$$w_{\text{shaft, net in}} + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + e_{\text{mech, loss}}$$

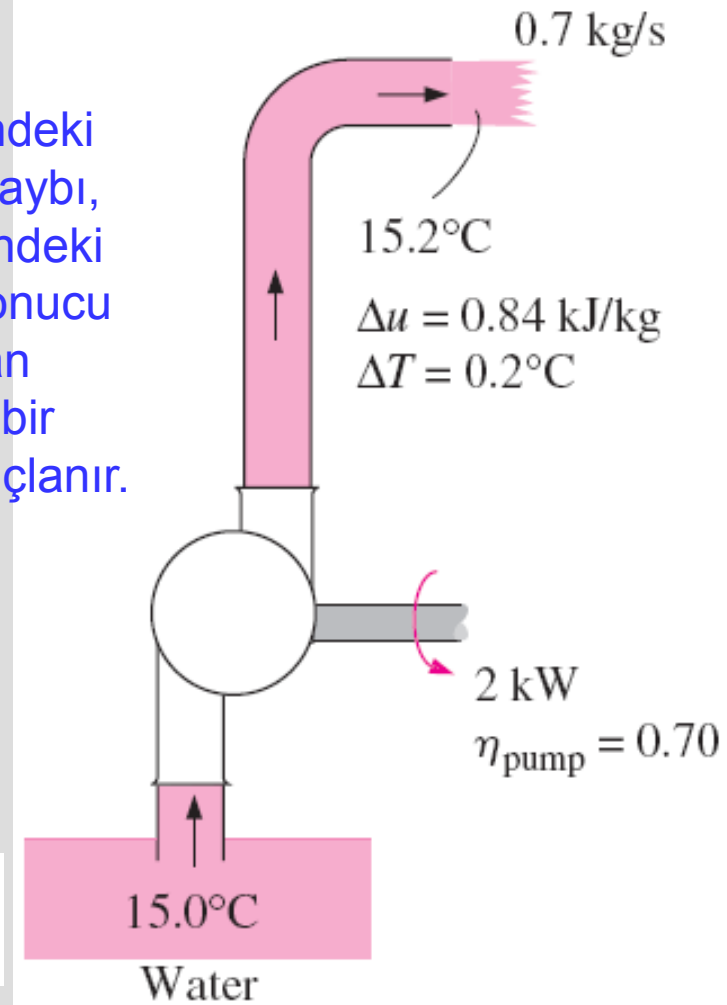
$$w_{\text{shaft, net in}} = w_{\text{pump}} - w_{\text{turbine}}$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{pump}} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{turbine}} + e_{\text{mech, loss}}$$

$$\dot{m} \left( \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{W}_{\text{pump}} = \dot{m} \left( \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{W}_{\text{turbine}} + \dot{E}_{\text{mech, loss}}$$

$$\dot{E}_{\text{mech, loss}} = \dot{E}_{\text{mech loss, pump}} + \dot{E}_{\text{mech loss, turbine}} + \dot{E}_{\text{mech loss, piping}}$$

Bir akış sistemindeki mekanik enerji kaybı, akışın iç enerjisindeki artış ve bunun sonucu olarak akışkan sıcaklığındaki bir yükselme ile sonuçlanır.





Tipik bir güç üretim yeri çok sayıda boru, dirsek, valf, pompa, türbiniyle, tamamı tersinilmeyen kayıplara sahip.

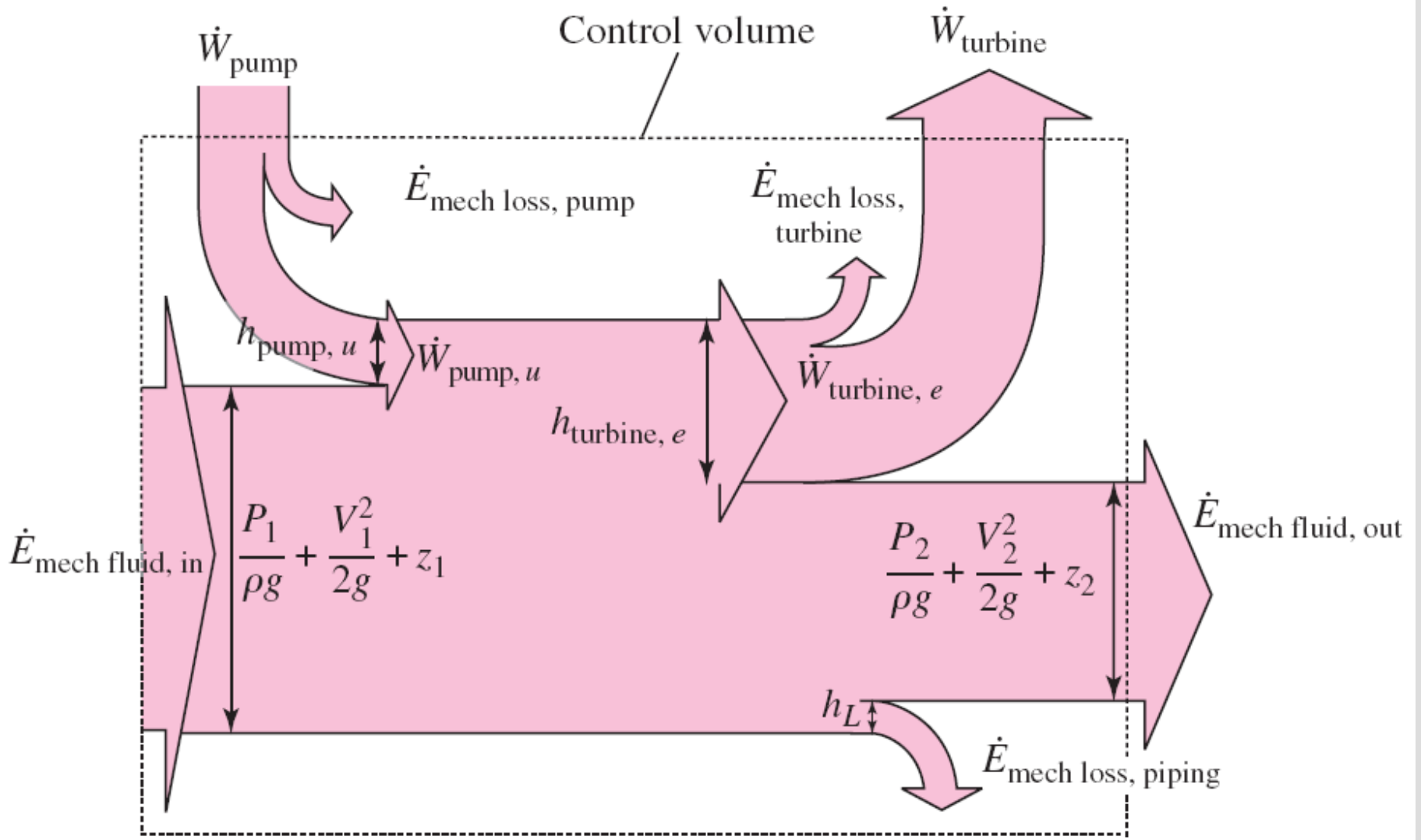


## Yükler Cinsinden Enerji denklemi

$$\frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump}, u} = \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine}, e} + h_L$$

where

- $h_{\text{pump}, u} = \frac{w_{\text{pump}, u}}{g} = \frac{\dot{W}_{\text{pump}, u}}{\dot{m}g} = \frac{\eta_{\text{pump}} \dot{W}_{\text{pump}}}{\dot{m}g}$  is the *useful head delivered to the fluid by the pump*. Because of irreversible losses in the pump,  $h_{\text{pump}, u}$  is less than  $\dot{W}_{\text{pump}}/\dot{m}g$  by the factor  $\eta_{\text{pump}}$ .
- $h_{\text{turbine}, e} = \frac{w_{\text{turbine}, e}}{g} = \frac{\dot{W}_{\text{turbine}, e}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{\text{turbine}}}{\eta_{\text{turbine}} \dot{m}g}$  is the *extracted head removed from the fluid by the turbine*. Because of irreversible losses in the turbine,  $h_{\text{turbine}, e}$  is greater than  $\dot{W}_{\text{turbine}}/\dot{m}g$  by the factor  $\eta_{\text{turbine}}$ .
- $h_L = \frac{e_{\text{mech loss, piping}}}{g} = \frac{\dot{E}_{\text{mech loss, piping}}}{\dot{m}g}$  is the irreversible *head loss* between 1 and 2 due to all components of the piping system other than the pump or turbine.



Pompa ve türbin içeren bir akış sistemi için mekanik enerji akış diyagramı. Düşey boyutlar, eşdeğer akışkan sütunu yüksekliği, yani yükler cinsinden ifade edilen denklemdeki terime karşılık gelen enerjiyi göstermektedir.

$$\frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump}, u} = \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine}, e} + h_L \quad (5-74)$$

## Özel Durum: Mekanik iş makinelerinin olmadığı ve sürtünme kayıplarının ihmal edilebildiği sıkıştırılamaz akış

Borulama kayıpları ihmal edilebilir olduğunda, mekanik enerjinin ihmal edilebilir derecede küçük bir miktarının yitim olarak ısı enerjisiye dönüşümü söz konusudur  $h_L = e_{\text{mech loss, piping}}/g \cong 0$ . Ayrıca, pompa, türbin gibi mekanik iş makinelerinin olmadığına  $h_{\text{pump}, u} = h_{\text{turbine}, e} = 0$  Böylece 5-74 denklemi aşağıdaki hake indirgenir

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \text{or} \quad \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constant}$$

**Bernoulli denklemi** Newton'un ikinci hareket denklemi kullanılarak türetilmiştir.

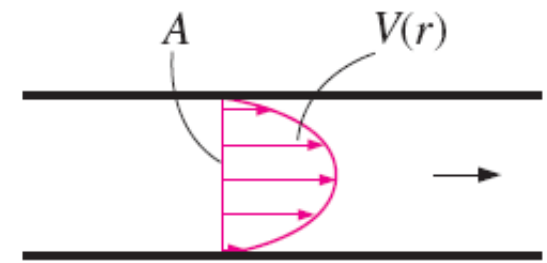
Böylece, Bernoulli denklemi enerji denkleminin dejenere olmuş hali olarak düşünülebilir.

## Kinetik Enerji Düzeltme Faktörü, $\alpha$

Bir toplamın karesi, elemanlarının karelerinin toplamına eşit olmadığından bir akışın  $V^2/2$  ifadesi ile elde edilen kinetik enerjisi akışın gerçek kinetik enerjisine eşit değildir.

Bu hata enerji denklemindeki  $V^2/2$  terimleri yerine  $\alpha V_{avg}^2/2$  ( $\alpha$  kinetik enerji düzeltme faktörü) yazılarak düzeltilebilir.

Hızın radyal mesafe ile değişimini veren denklemleri kullanarak, yuvarlak bir boru içerisindeki tam gelişmiş laminer boru akışı için düzeltme faktörünün 2.0 olduğu ve tam gelişmiş türbülanslı akış için ise 1.04 ile 1.11 arasında değiştiği gösterilebilir.



$$\dot{m} = \rho V_{avg} A, \quad \rho = \text{constant}$$

$$\begin{aligned} \dot{KE}_{act} &= \int ke \delta \dot{m} = \int_A \frac{1}{2} [V(r)]^2 [\rho V(r) dA] \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_A [V(r)]^3 dA \end{aligned}$$

$$\dot{KE}_{avg} = \frac{1}{2} \dot{m} V_{avg}^2 = \frac{1}{2} \rho A V_{avg}^3$$

$$\alpha = \frac{\dot{KE}_{act}}{\dot{KE}_{avg}} = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{V(r)}{V_{avg}} \right)^3 dA$$

Bir en-kesitte gerçek hız dağılımı  $V(r)$  ve ortalama hız dağılımı  $V_{avg}$ 'yi kullanarak kinetik enerji düzeltme faktörlerinin hesaplanması.

$$\dot{m} \left( \frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{W}_{pump} = \dot{m} \left( \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{W}_{turbine} + \dot{E}_{mech, loss}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{pump, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbine, e} + h_L$$

## Örnek 5.11: Sürtünmenin Akışkan Sıcaklığı ve Yük Kaybı Üzerindeki Etkisi

Bir akışkanın adyabatik, bir akış bölümünde daimi ve sıkıştırılmaz akışı esnasında (a)sürtünme göz ardı edildiğinde sıcaklığının sabit kaldığını ve yük kaybı oluşmadığını, (b)sürtünme etkileri göz önüne alındığında sıcaklığının arttığını ve yük kaybı meydana geldiğini gösteriniz. Böyle bir akış esnasında akışkanın sıcaklığını düşürmenin mümkün olup olmayacağını irdeleyiniz.

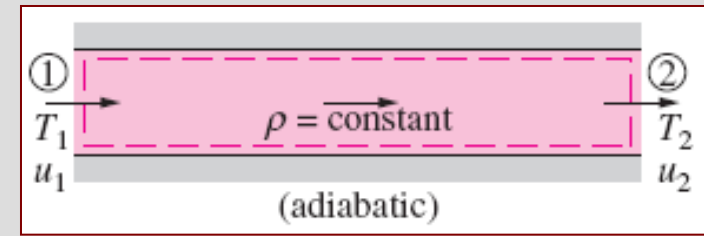
ÇÖZÜM: Adyabatik bir akış bölümünden geçen daimi ve sıkıştırılmaz akış incelenmektedir. Sürtünmenin sıcaklık ve ısı kaybı üzerindeki etkileri belirlenecektir.

*Kabuller: Akış daimi ve sıkıştırılmazdır. 2 Akış bölümü adyabatiktir dolayısıyla, ısı geçişi yoktur.*

*Analiz: Sıkıştırılmaz bir akış esnasında akışkanın yoğunluğu sabit kalır ve entropi değişimi;*

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

ile verilir. Bu bağıntı akışkan akış bölümünden girişteki 1. halinden, çıkıştaki 2 haline doğru akarken, akışkanda birim kütle başına meydana gelen entropi değişimini gösterir.



Entropi değişimi iki nedenden dolayı meydana gelir: (1) ısı geçişi ve (2) tersinmezlikler. Dolayısıyla, ısı geçişi olmadığında entropi değişimi sadece, etkisi daima entropiyi attıracak şekilde olan tersinmezliklerden kaynaklanır:

(a) Sürtünme ve çevrinti gibi tersinmezlikler bulunmadığında adyabatik bir akış bölümündeki ( $q_{\text{net in}}=0$ ) entropi değişimi sıfırdır ve böylece *tersinir akış için*,

$$\text{Sıcaklık değişimi: } \Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 0 \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1$$

$$\text{Mekanik enerji kaybı: } e_{\text{mech loss, piping}} = u_2 - u_1 - q_{\text{net in}} = c_v(T_2 - T_1) - q_{\text{net in}} = 0$$

$$\text{Yük kaybı: } h_L = e_{\text{mech loss, piping}}/g = 0$$

olur. Böylece, isi geçişi ve sürtünme etkileri ihmal edilebilir olduğunda; (1) akışkanın sıcaklığının sabit kaldığı, (2) bir mekanik enerjinin ısı enerjisiye dönüşümünün olmadığı ve (3) tersinmez yük kayıplarının olmadığı sonucuna varırız.

(b) Sürtünme gibi tersinmezlikler hesaba katıldığında entropi değişimi sıfırdan büyük olur. Böylece,

$$\text{Sıcaklık değişimi: } \Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} > 0 \quad \rightarrow \quad T_2 > T_1$$

$$\text{Mekanik enerji kaybı: } e_{\text{mech loss, piping}} = u_2 - u_1 - q_{\text{net in}} = c_v(T_2 - T_1) > 0$$

$$\text{Yük kaybı: } h_L = e_{\text{mech loss, piping}}/g > 0$$

olur. Böylece, akış adyabatik ve tersinmez olduğunda; (1) akışkanın sıcaklığının arttığı, bir miktar mekanik; enerjinin ısı. enerjiye dönüştüğü .ve (3). bir miktar tersinmez yük: kaybının olduğu sonucuna varırız. *İrdeleme Daimi, sıkıştırılmaz ve adyabatik akış esnasında akışkanın sıcaklığını azaltmak; imkansızdır. Çünkü, bu adyabatik bir sistemin entropisinin<sup>70</sup> azaltılmasını gerektirir ve bu da termodinamiğin ikinci yasasına aykırıdır..*

## Örnek : Pompadaki Pompalama Gücü ve Sürtünme Isınması

Bir su dağıtım şebekesinin pompasına, verimi yüzde 90 olan 15 kW 'lık: elektrik motoru ile güç sağlanmaktadır. Pompadan 50 Ms'lik debiyle su geçmektedir. Giriş ve çıkış borularının çapları aynıdır ve pompa boyunca olan yükseklik farkı ihmal edilebilir. Pompanın giriş ve çıkışında basınçlar sırasıyla, 100 kPa ve 300 kPa (mutlak) olarak ölçülüyorsa;

(a)pompanın, mekanik verimini, (b) su pompa içerisinden geçerken mekanik verimsizlikten dolayı suda meydana gelen sıcaklık artışını belirleyiniz.

**ÇÖZÜM:** Pompanın giriş ve çıkışındaki basınçlar ölçülmüştür. Pompanın mekanik verimi ya suda meydana gelen sıcaklık artışı belirlenecektir.

**Kabuller:** 1) Akış daimi ve sıkıştırılmanı azdır 2) Pompa harici bir motor ile tahrik ediliyor ve dolayısıyla motorun ürettiği ısı atmosfere yayılıyor. 3) Pompanın, giriş ve çıkışı arasındaki yükseklik farkı ihmal edilebilir,  $z_1=z_2$ 'dir. 4) Giriş ve çıkış borularının çapları aynı olduğundan giriş ve çıkıştaki hızlar ile kinetik enerji düzeltme faktörleri de birbirine eşittir

**Özellikler:** Suyun yoğunluğunu  $1 \text{ kg/L} = 1000 \text{ kg/m}^3$  ve özgül ısısını  $4.18 \text{ kJ/kgC}$  olarak alıyoruz.

**Analiz:** (a) Pompadan geçen suyun kütledebisi,

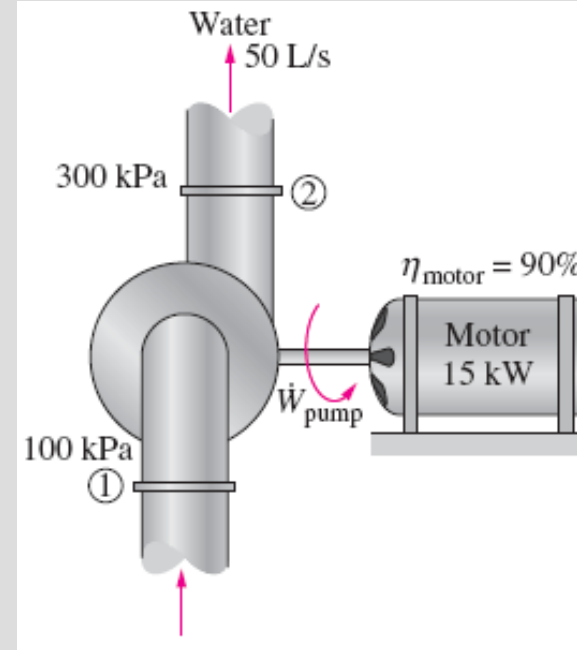
$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (1 \text{ kg/L})(50 \text{ L/s}) = 50 \text{ kg/s}$$

Motor 15 kW'lık güç çekiyor ve yüzde 90 verim ile çalışıyor. 0 halde, motorun pompaya ilettiği mekanik güç (mil gücü),

$$\dot{W}_{\text{pump, shaft}} = \eta_{\text{motor}} \dot{W}_{\text{electric}} = (0.90)(15 \text{ kW}) = 13.5 \text{ kW}$$

olarak hesaplanır. Pompanın mekanik verimini belirleyebilmek için, akışkan pompadan geçerken akışkanın mekanik enerjisinde meydana gelen artışı bilmemiz gerekir ve bu da,

$$\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}} = \dot{E}_{\text{mech, out}} - \dot{E}_{\text{mech, in}} = \dot{m} \left( \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) - \dot{m} \left( \frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right)$$



Denklemi sadeleştirerek ve verilen değerleri yerine koyarak.

$$\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}} = \dot{m} \left( \frac{P_2 - P_1}{\rho} \right) = (50 \text{ kg/s}) \left( \frac{(300 - 100) \text{ kPa}}{1000 \text{ kg/m}^3} \right) \left( \frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3} \right) = 10.0 \text{ kW}$$

olarak bulunur. Buradan pompanın mekanik verimi,

$$\eta_{\text{pump}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump, u}}}{\dot{W}_{\text{pump, shaft}}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{pump, shaft}}} = \frac{10.0 \text{ kW}}{13.5 \text{ kW}} = \mathbf{0.741} \text{ or } \mathbf{74.1\%}$$

(b) Pompadan verilen 13.5 kW'lık mekanik gücün sadece 10 kW'ı akışkana mekanik enerji olarak aktarılır. Geriye kalan 3.5 kW'lık kısmı sürtünme etkilerinden dolayı ısı enerjisiye dönüşür ve bu "kayıp" mekanik enerji, akışkanda ısınma etkisi olarak kendini gösterir.

$$\dot{E}_{\text{mech, loss}} = \dot{W}_{\text{pump, shaft}} - \Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}} = 13.5 - 10.0 = 3.5 \text{ kW}$$

Bu mekanik verimsizlik nedeniyle akışkanda meydana gelen sıcaklık artışı, ısı enerjisi dengesinden belirlenebilir:

$$\dot{E}_{\text{mech, loss}} = \dot{m}(u_2 - u_1) = \dot{m}c\Delta T.$$

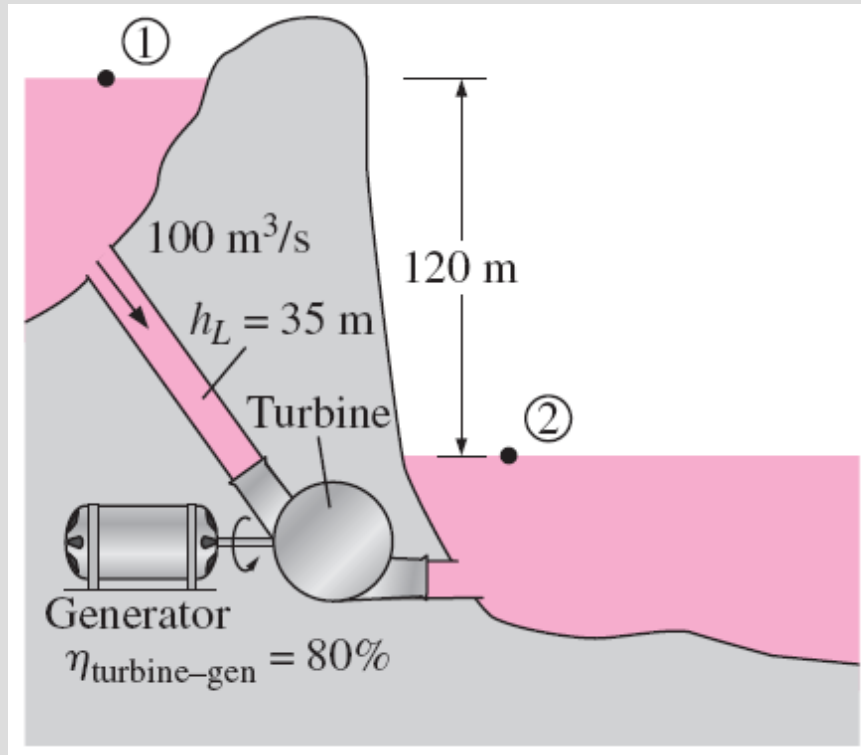
$$\Delta T = \frac{\dot{E}_{\text{mech, loss}}}{\dot{m}c} = \frac{3.5 \text{ kW}}{(50 \text{ kg/s})(4.18 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C})} = \mathbf{0.017^\circ\text{C}}$$

olarak bulunur. O halde su, pompadan geçerken, mekanik verimsizlikten dolayı suda 0.017 °C'lik çok küçük bir sıcaklık artışı meydana gelecektir.

**İrdeleme:** Gerçek bir uygulamada ortaya çıkan ısı, pompanın gövdesine buradan da çevredeki havaya geçeceğinden suda meydana gelen sıcaklık artışı muhtemelen daha düşük olacaktır. Eğer pompa motorunun tamamı su içine daldırılıyorsa motor verimsizliğinden dolayı<sup>1</sup> havaya yayılan 1.5 kW 'lık güç de ısı olarak çevredeki suya geçirdi. Bu da su sıcaklığının daha da artmasına neden olurdu.



## Örnek: Barajdan Hidroelektrik Güç Üretimi



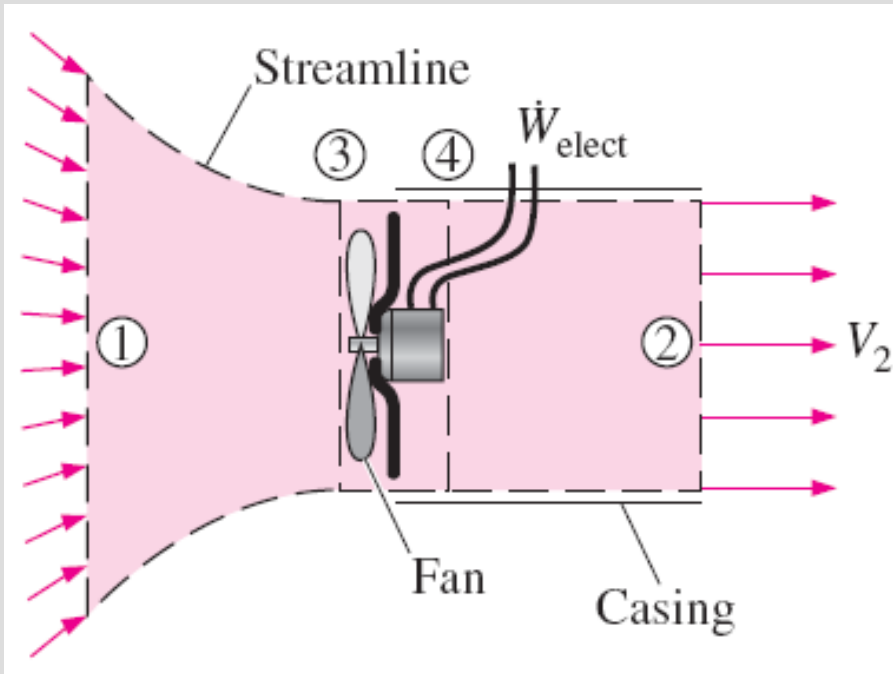
$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump}, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine}, e} + h_L$$

$$h_{\text{turbine}, e} = z_1 - h_L$$

$$\dot{W}_{\text{turbine}, e} = \dot{m}gh_{\text{turbine}, e}$$

$$\dot{W}_{\text{electric}} = \eta_{\text{turbine-gen}} \dot{W}_{\text{turbine}, e}$$

## Örnek: Bilgisayarın hava ile soğutulması için fan seçimi



3 ve 4 arasında enerji denklemi

$$\dot{m} \frac{P_3}{\rho} + \dot{W}_{fan} = \dot{m} \frac{P_4}{\rho} + \dot{E}_{mech\ loss, fan}$$

$$\dot{W}_{fan, u} = \dot{m} \frac{P_4 - P_3}{\rho}$$

1 ve 2 arasında enerji denklemi

$$\dot{m} \left( \frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + g z_1 \right) + \dot{W}_{fan} = \dot{m} \left( \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + g z_2 \right) + \dot{W}_{turbine} + \dot{E}_{mech\ loss, fan}$$

$$\dot{W}_{fan} - \dot{E}_{mech\ loss, fan} = \dot{W}_{fan, u}$$

$$\dot{W}_{fan, u} = \dot{m} \alpha_2 \frac{V_2^2}{2}$$

$$\dot{W}_{elect} = \frac{\dot{W}_{fan, u}}{\eta_{fan-motor}}$$

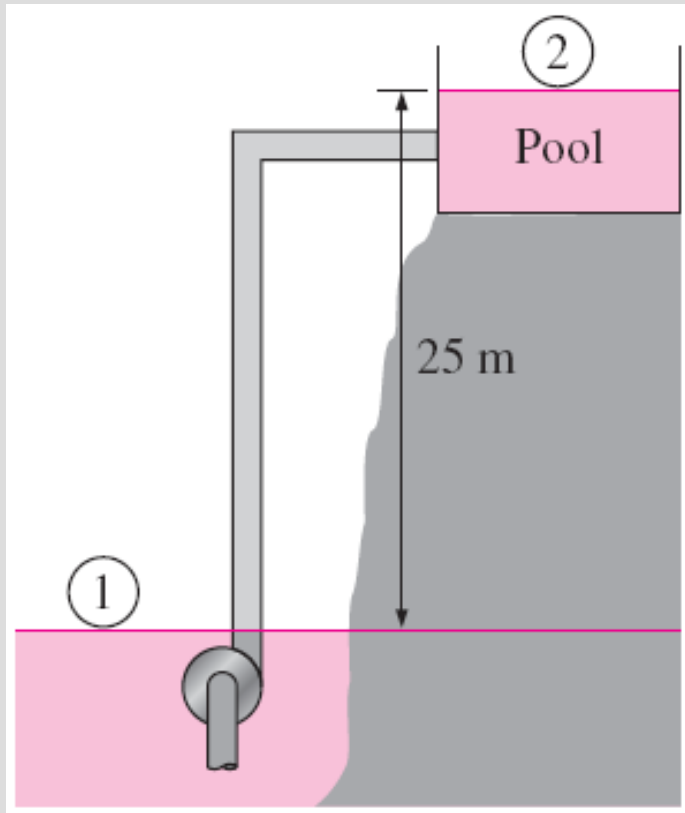


## Örnek: Bir depo veya gölden su pompalanması

$$\dot{W}_{\text{pump}, u} = \eta_{\text{pump}} \dot{W}_{\text{shaft}} = (0.72)(5 \text{ kW}) = 3.6 \text{ kW}$$

1 ve 2  
arasındaki  
enerji  
denklemleri

$$\dot{m} \left( \frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{W}_{\text{pump}, u} = \dot{m} \left( \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{W}_{\text{turbine}, e} + \dot{E}_{\text{mech loss, piping}}$$



$$\dot{W}_{\text{pump}, u} = \dot{m}gz_2 + \dot{E}_{\text{mech loss, piping}}$$

$$\dot{E}_{\text{mech loss, piping}} = \dot{m}gh_L$$

Pompa için

$$\Delta P = P_{\text{out}} - P_{\text{in}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump}, u}}{\dot{V}}$$

# Özet

- Giriş
  - ✓ Kütlenin korunumu
  - ✓ Linear Momentum Denklemi
  - ✓ Enerjinin Korunumu
- Kütlenin korunumu
  - ✓ Kütle ve Hacim Akış Debileri
  - ✓ Kütlenin korunumu
  - ✓ Hareket eden veya şekil değiştiren kontrol hacimleri
  - ✓ Daimi Akış Prosesleri için Kütle Dengesi
  - ✓ Özel Durum: Sıkıştırılmaz Akış
- Mekanik Enerji ve Verim

- Bernoulli Denklemi
  - ✓ Bir akışkan parçacığının ivmesi
  - ✓ Bernoulli denkleminin türetilmesi
  - ✓ Akış çizgileri boyunca kuvvet dengesi
  - ✓ Daimi olmayan sıkıştırılabilir akış
  - ✓ Statik, Dinamik ve Durma Basınçları
  - ✓ Bernoulli denkleminin kullanımının sınırları
  - ✓ Hidrolik Eğim Çizgisi (HGL) ve Enerji Eğim Çizgisi (EGL)
  - ✓ Bernoulli denkleminin uygulamaları
- Genel Enerji Denklemi
  - ✓ Isı ile Enerji Geçişi,  $Q$
  - ✓ İş ile Enerji Geçişi,  $W$
  - ✓ Mil İş
  - ✓ Basınç kuvvetlerinin yaptıkları iş
- Daimi Akışların Enerji Analizi
  - ✓ Özel Durum: Mekanik İş Makinelerinin Olmadığı ve Sürtünmenin İhmal Edilebilir Olduğu Sıkıştırılmaz Akış
  - ✓ Kinetik Enerji Düzeltme Faktörü,  $\alpha$