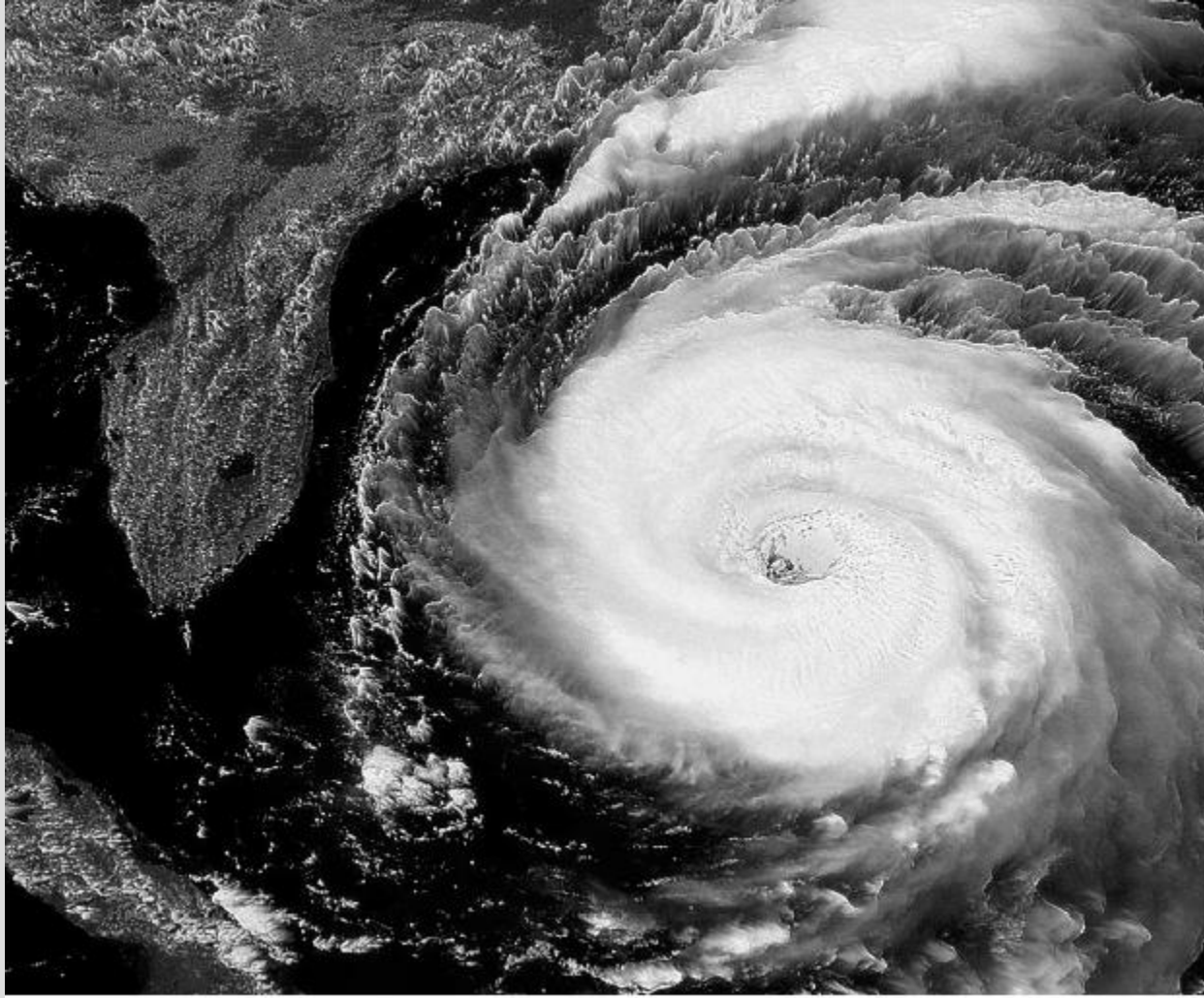


Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları, 2nd Edition
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala
McGraw-Hill, 2010

Bölüm 4

AKIŞKAN KİNEMATİĞİ



Florida kıyısı yakınındaki fırtınanın uydu görüntüsü; su damlacıkları hava ile hareket ediyor saat yönünün tersine dönme hareketi. Fakat, fırtınanın büyük bir kısmı irrotasyonel (dönümsüz) sadece fırtınanın gözü rotasyonel (dönümlü).

Amaçlar

- Langrange ve Euler tanımlamaları arasındaki dönüşümde maddesel türevin rolünü anlatma
- Çeşitli akış görselleştirme tipleri ile bir akışa ait karakteristiklerin çizim yöntemlerini ayırt etmeyi sağlama
- Akışkanların bir çok şekilde gerçekleşen hareket ve şekil değiştirme özelliklerini kavramayı sağlama
- Akışın çevrinti (çevrinti) özelliğine göre rotasyonel (dönümlü) ve dönümsüz akış bölgelerini ayırt edebilmeyi sağlama
- Reynold transport denkleminin faydasını anlama

4-1 ■ LAGRANGE VE EULER TANIMLAMALARI

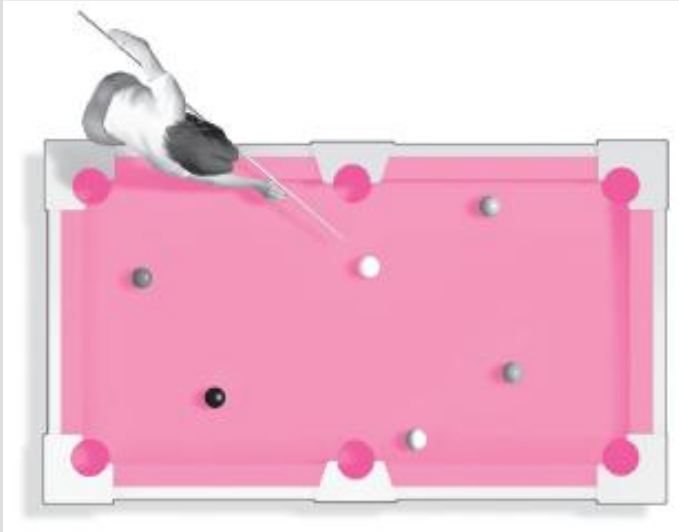
Kinematik: Hareketin incelenmesiyle ilgilenir

Akışkan kinematiği: akışkanların nasıl aktığının ve akışkan hareketinin nasıl tanımlanacağını incelenmesidir.

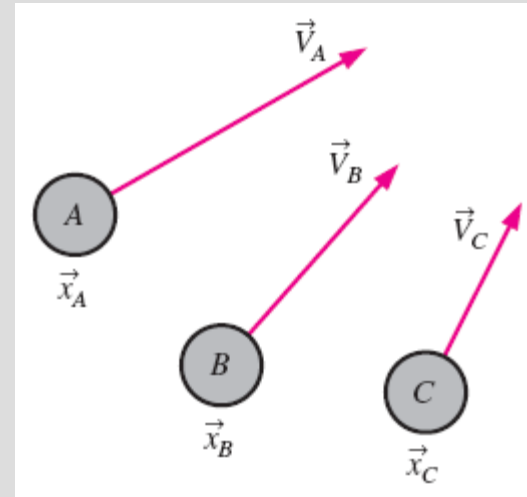
Temelde hareketi tanımlamanın iki farklı yolu vardır: Lagrange ve Euler

Lagrange tanımlaması: Akan bir akışkana uygulanmasına denir.

Bu yöntemde akışkanın her bir parçacığının konumunun ve hızının izinin sürülmesi gerekmektedir.



Bir bilardo masasındaki toplar gibi az sayıda cisim söz konusu olduğunda, bunların her biri izlenebilir.



Lagrange tanımlamasında tek tek parçacıkların konum ve hızlarının izlenmesi gerekir.

- Daha yaygın bir akış tanımlama yöntemi ise akışkan hareketinin **Euler tanımlamasıdır**.
- Akışın Euler tanımlamasında; akışkanın içerisinden girip çıktığı **akış bölgesi** veya **kontrol hacmi** adı verilen sonlu bir hacim tanımlanır.
- Sabit kütleli akışkan parçacıklarının konum ve hızlarının izlenmesi yerine kontrol hacmi içerisinde konumun ve zamanın fonksiyonu olan alan değişkenleri tanımlanır.
- Kontrol hacmi içerisinde konumun ve zamanın fonksiyonu olan alan değişkenleri tanımlanır.
- Örneğin, **basınç alanı** skaler alan değişkenidir. Hız alanı vektör alanı değişkeni olarak tanımlanır. **vector field variable**.

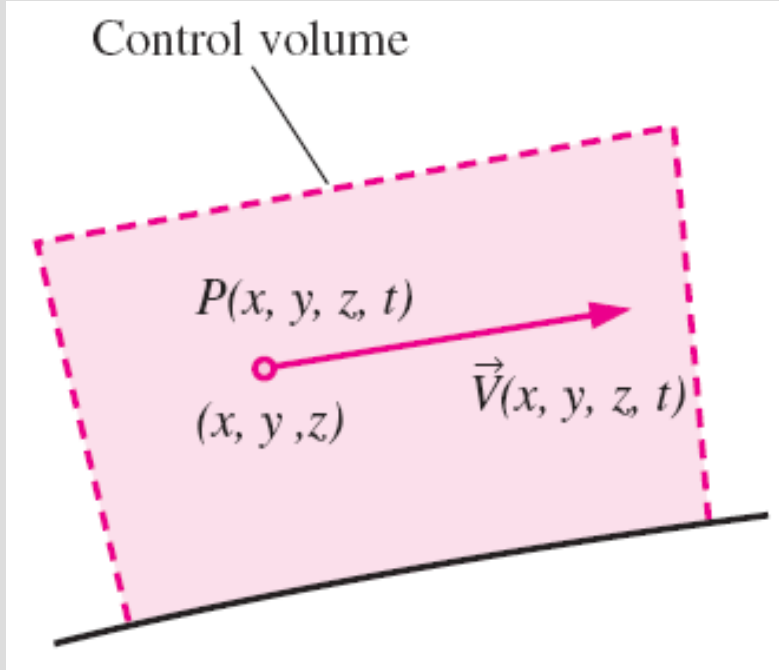
$$\textit{Pressure field:} \quad P = P(x, y, z, t)$$

$$\textit{Velocity field:} \quad \vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

$$\textit{Acceleration field:} \quad \vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$$

Bunlar (ve diğer) alan değişkenleri hep birlikte akış alanını tanımlar. Hız alanının kartezyen koordinatlardaki açılımı

$$\vec{V} = (u, v, w) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$



Euler tanımlamasında basınç alanı ve hız alanı gibi alan değişkenleri herhangi bir konumda ve herhangi bir anda tanımlanır.

- Euler tanımlamasında, her bir akışkan parçacığına gerçekte ne olduğuyla değil, göz önüne alınan zamanda ve göz önüne alınan konumdaki bir parçacığın basıncının, hızının, ivmesinin vb. ne olduğu ile ilgilenilir.
- Her ne kadar Lagrange tanımlamasının kullanışlı olduğu birçok durum varsa da, akışkanlar mekaniği uygulamalarında Euler tanımlaması çoğunlukla daha uygun olmaktadır.
- Deneysel ölçümler de genellikle Euler tanımlamasına daha uygundur

Örnek 4.1: Daimi, İki-Boyutlu Hız Alanı

Daimi, sıkıştırılmaz, iki-boyutlu bir hız alanı

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$$

şeklinde verilmektedir. Burada x- ve y-koordinatları metre, hız büyüklüğü ise m/s birimindedir: Durma noktası, akış alanı içerisinde hızın sıfır olduğu nokta olarak tanımlanmaktadır,

(a) Akış alanı içerisinde herhangi bir durma noktası olup olmadığını belirleyiniz; eğer varsa nerededir? (b) $x = -2$ m ila 2 m ve $y = 0$ m ila 5 m arasında kalan bölgede birkaç farklı konumda hız vektörlerini çizin; akış alanını nitelik bakımından W tarif ediniz.

Analiz (a) : \vec{V} bir vektör olduğundan sıfır olabilmesi için tüm bileşenlerinin sıfıra eşit olması gerekir.

$$u = 0.5 + 0.8x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -0.625 \text{ m}$$

$$v = 1.5 - 0.8y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1.875 \text{ m}$$

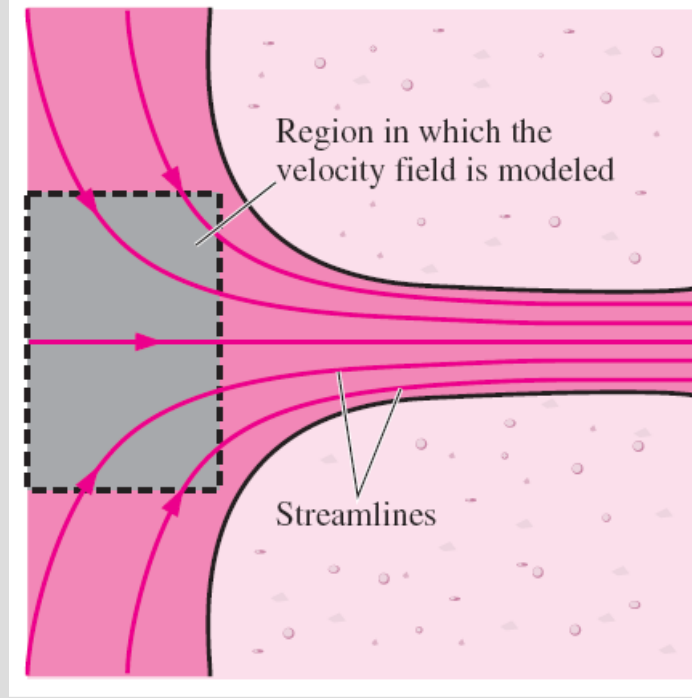
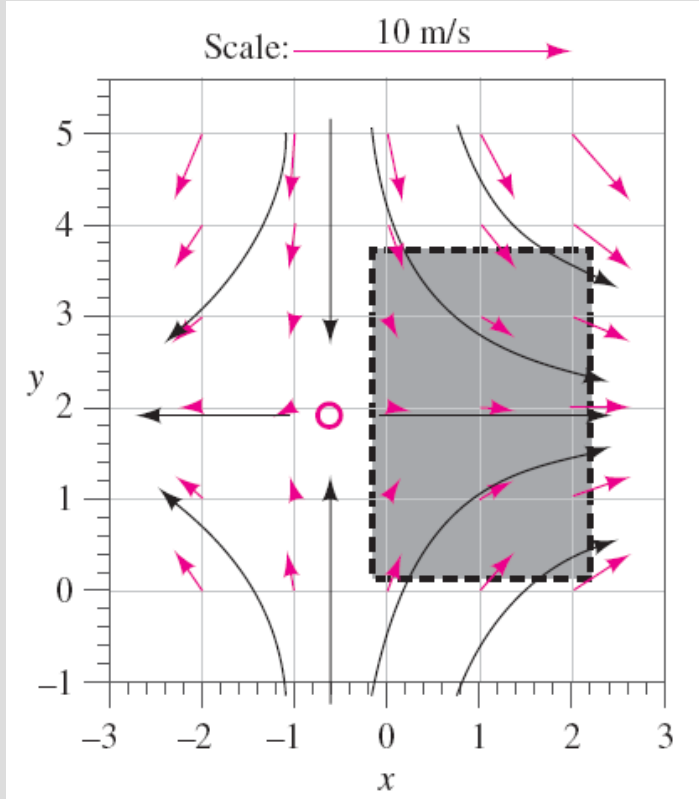
Buna göre $(-0.625, 1.875)$ da bir durma noktası vardır.

Örneğin, $(x=2\text{m}, y=3\text{ m}, u=2.10\text{ v}=-0.9\text{ m/s'dir. Bu noktadaki hızın büyüklüğü } 2,28\text{ m/s'dir. Bu ye diğer bir dizi konumdaki hız vektörleri, bileşenlerine göre hesaplatılmış ve sonuçlar bir sonraki slattaki şekilde çizilmiştir. Akış üst ve alttan, girerek, } y= 1.875\text{ m'deki yatay simetri çizgisi etrafından sağa ve sola yayıldığından akış, durma noktası akışı olarak tarif edilebilir: (Şekilde durma noktası kırmızı daire ile gösterilmiştir.$

Sadece şekilde gölgelendirilmiş kısmi göz önüne alalım. Bu akış alanı soldan sağa doğru daralan ve ivmelenen akışı temsil etmektedir. Böyle bir akışla, örnek olarak, bir hidroelektrik barajının daldırılmış çan ağız biçimindeki su alma ağızı yakınında karşılaşılabılır. Verilen hız alanının bu kısmı, Şekildeki fiziksel:akış alanının gölgelendirilmiş kısmının birinci mertebeden yaklaştırma olarak düşünülebilir.

Daimi, İki-Boyutlu Hız Alanı

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$$



Bir hidroelektrik barajının çan ağız biçimindeki su atma ağız yakınında görülen akış alanı; Örnek 4-1 'deki hız alanının bir kısmı, bu fiziksel akış alanının birinci mertebeden yaklaşımı olarak kullanılabilir.

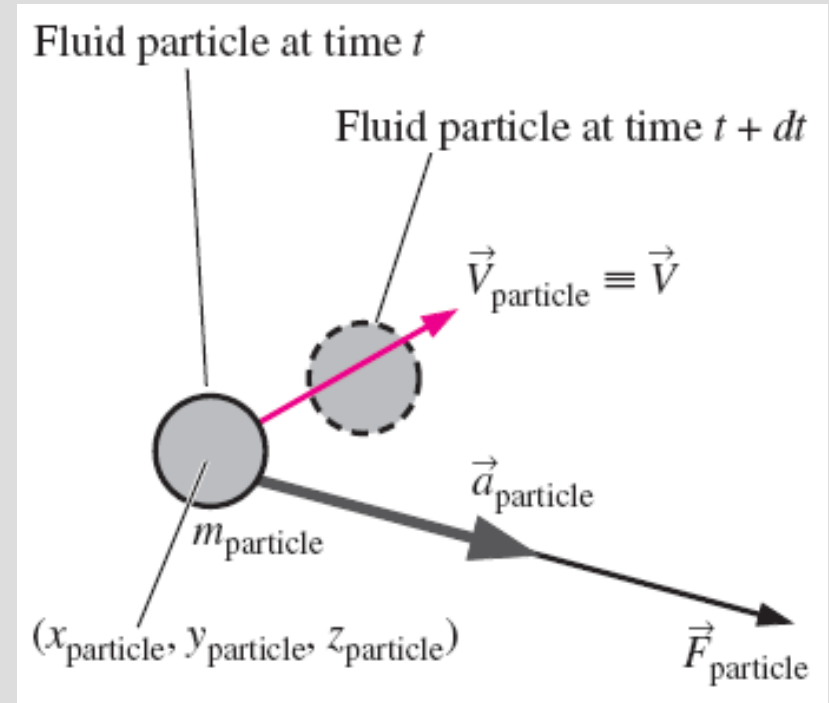
Örnek 4-1 'deki hız alanına ait hız vektörleri. Ölçek üstteki ok ile gösterilmiştir. Siyah eğriler, bazı akım çizgilerinin hesaplanan hız vektörlerine göre yaklaşık şekillerini temsil etmektedir. Durma noktası kırmızı daire ile belirtilmiştir. Gölgeleştirilmiş bölge, akış alanının bir giriş akışını temsil edebilecek kısmını göstermektedir.

İvme Alanı

Akışın hareket denklemleri (Newton'un ikinci yasası gibi) belirli bir cisim için yazılır, burada cisim olarak akışkan parçacığı veya maddesel parçacık dediğimiz küçük bir **akışkan kütle** alınır.

Eğer akış içerisinde hareket eden belirli bir akışkan parçacığını izleyecek olsaydık, Lagrange tanımlamasını kullanıyor olurduk ve böylece hareket denklemleri doğrudan uygulanabilirdi.

Örneğin, parçacığın uzayda konumunu, **maddesel konum vektörü** ($x_{\text{particle}}(t)$, $y_{\text{particle}}(t)$, $z_{\text{particle}}(t)$).



Newton'un ikinci kanununun bir akışkan parçacığına uygulanması; ivme vektörü (gri ok) kuvvet vektörü (siyah vektör) ile aynı yöndedir, ancak hız vektörü (mavi ok) farklı yönde etkiyebilir.

Newton's second law:

$$\vec{F}_{\text{particle}} = m_{\text{particle}} \vec{a}_{\text{particle}}$$

Acceleration of a fluid particle:

$$\vec{a}_{\text{particle}} = \frac{d\vec{V}_{\text{particle}}}{dt}$$

$$\vec{V}_{\text{particle}}(t) \equiv \vec{V}(x_{\text{particle}}(t), y_{\text{particle}}(t), z_{\text{particle}}(t), t)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{particle}} &= \frac{d\vec{V}_{\text{particle}}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}(x_{\text{particle}}, y_{\text{particle}}, z_{\text{particle}}, t)}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_{\text{particle}}} \frac{dx_{\text{particle}}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y_{\text{particle}}} \frac{dy_{\text{particle}}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z_{\text{particle}}} \frac{dz_{\text{particle}}}{dt} \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{\text{particle}}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

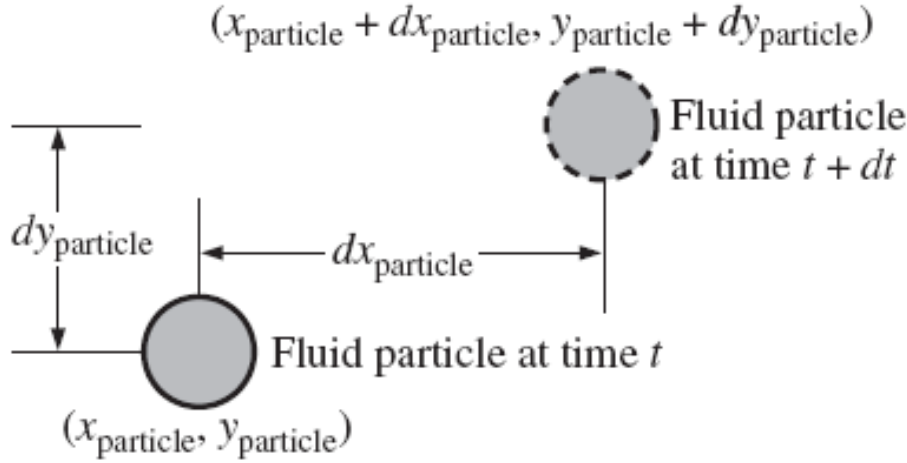
Acceleration of a fluid particle expressed as a field variable:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ Yerel ivme

$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$ Advective (convective) ivmelenme

Gradient or del operator:
$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$



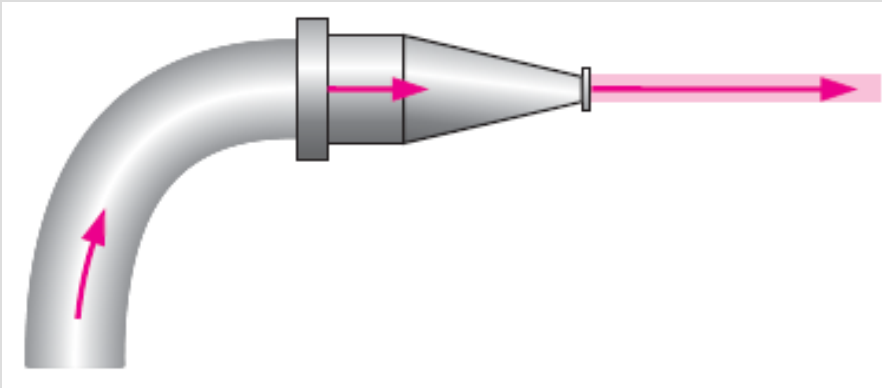
Kartezyen koordinatlarda ivme vektörünün bileşenleri

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Bir akışkan parçacığını izlerken hızın u bileşeni dx_{particle}/dt şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde, $v=dy_{\text{particle}}/dt$ ve $w=dz_{\text{particle}}/dt$ şeklinde tanımlanır. Burada hareket, basitlik açısından sadece iki boyutta gösterilmiştir.



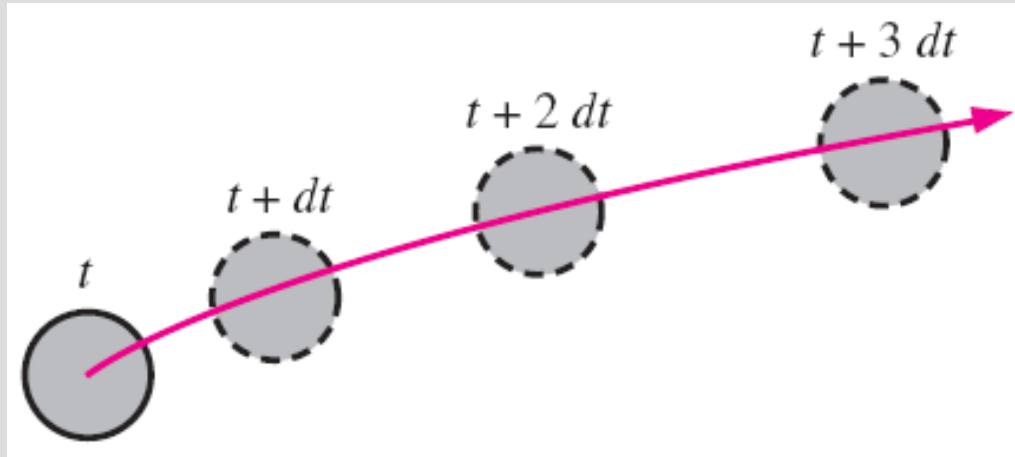
Bir bahçe hortumu fıskiyesindeki su akışı, akış daimi olsa bile akışkan parçacıklarının ivmelenebildiğini göstermektedir. Bu örnekte çıkıştaki su hızı hortum içerisindeki su hızından çok daha yüksektir, bu da akış daimi olmasına rağmen akışkan parçacıklarının ivmelendikleri anlamına gelir.

Maddesel Türev

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Toplam türev operatörü d/dt 'ye özel bir isim verilir; **maddesel türev**. Maddesel türevi *akış alanı içerisinde hareket eden bir akışkan parçacığının izlenmesi ile oluşturulduğunu* vurgulamak için özel olarak D/Dt şeklinde gösterilir.

Maddesel türevin diğer isimleri arasında **toplam türev**, **parçacık türevi**, **Lagrange türevi**, **Euler türevi** ve **esas türev** de vardır.



Maddesel türev D/Dt , akış alanı boyunca hareket eden bir akışkan parçacığının izlenmesi esasına göre tanımlanır. Şekilde akışkan parçacığı sağa ve yukarı doğru hareket ettikçe, sağa doğru ivmelenmektedir

Material derivative:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$$

Material acceleration:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Material derivative of pressure:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})P$$

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}}_{\text{Material derivative}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{Local}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{Advective}}$$

Maddesel Türev daimi olmayan kısımla ve taşımsal veya advektif kısımdan ibarettir.

EXAMPLE 4-3 Material Acceleration of a Steady Velocity Field

Consider the steady, incompressible, two-dimensional velocity field of Example 4-1. (a) Calculate the material acceleration at the point ($x = 2$ m, $y = 3$ m). (b) Sketch the material acceleration vectors at the same array of x - and y -values as in Example 4-1.

Analysis (a) Using the velocity field of Eq. 1 of Example 4-1 and the equation for material acceleration components in Cartesian coordinates (Eq. 4-11), we write expressions for the two nonzero components of the acceleration vector:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= 0 + \underbrace{(0.5 + 0.8x)(0.8)} + \underbrace{(1.5 - 0.8y)(0)} + 0 = (0.4 + 0.64x) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

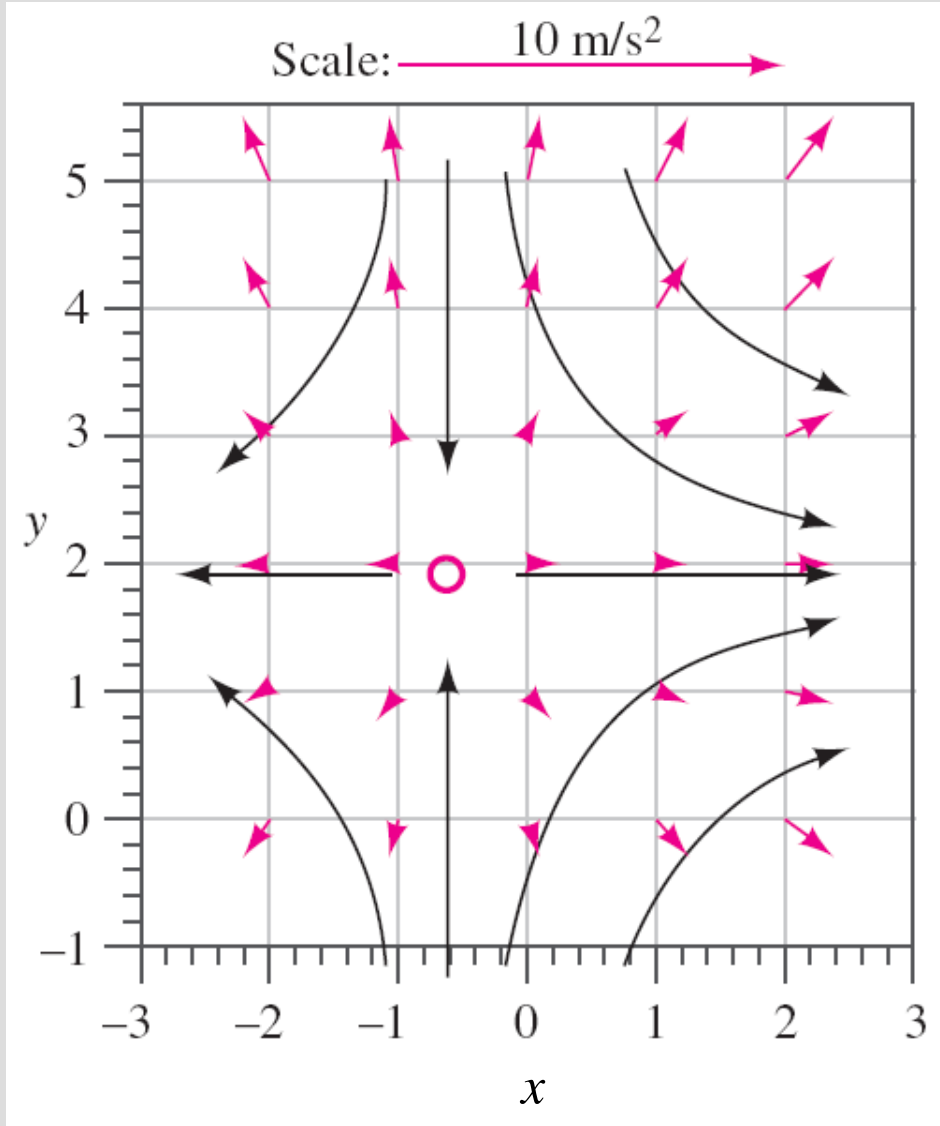
and

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= 0 + \underbrace{(0.5 + 0.8x)(0)} + \underbrace{(1.5 - 0.8y)(-0.8)} + 0 = (-1.2 + 0.64y) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

At the point ($x = 2$ m, $y = 3$ m), $a_x = 1.68 \text{ m/s}^2$ and $a_y = 0.720 \text{ m/s}^2$.

(b) The equations in part (a) are applied to an array of x - and y -values in the flow domain within the given limits, and the acceleration vectors are plotted in Fig. 4-14.

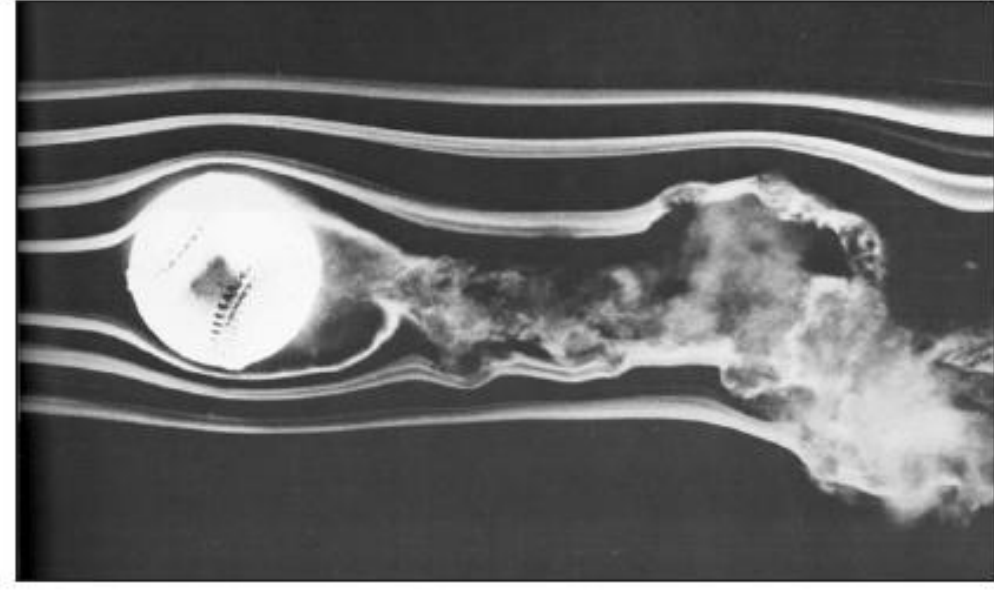
Daimi bir hız alanının maddesel ivmesi



Örnek 4-1 ve Örnek 4-3'teki hız alanına ait ivme vektörleri. Ölçek üstteki ok ile gösterilmiştir. Siyah eğriler ise, hesaplanan hız vektörlerine göre çizilmiş bazı akım çizgilerinin yaklaşık şekillerini temsil etmektedir. Durma noktası kırmızı daire ile gösterilmiştir.

4-2 ■ AKIŞ ŞEKİLLERİ VE AKIŞ GÖRSELLEŞTİRME

- **Akım görselleştirme:** Akış alanı özelliklerinin görsel incelemesi.
- Her ne kadar akışkanlar dinamiğinin nicel analizi ileri matematik bilgisi gerektirse de, akışı görselleştirme yoluyla akış alanı özelliklerinin görsel analizinden çok şey öğrenilebilir.
- Akışı görselleştirme sadece fiziksel deneylerde değil aynı zamanda sayısal çözümlerde de **[hesaplamalı akışkanlar dinamiği (CFD)]** faydalıdır.
- Gerçekten de CFD'yi kullanan bir mühendisin sayısal sonucu elde ettikten sonra yaptığı ilk şey akışı görselleştirmedir. Böylelikle sadece nicel verilerden ve sayılardan oluşan bir liste elde etmekten çok "olayın bütünü" göz önünde canlandırabilir.



Dönen beyzbol topu. F. N. M. Brown son yıllarının çoğunu Nötre Dame Üniversitesi'ndeki rüzgar tünellerinde dumanlı görselleştirmeye ve bunu kullanmaya adanmış biridir. Burada akış hızı 23.47 m/s ve top 630 devir/dakika ile dönmektedir.

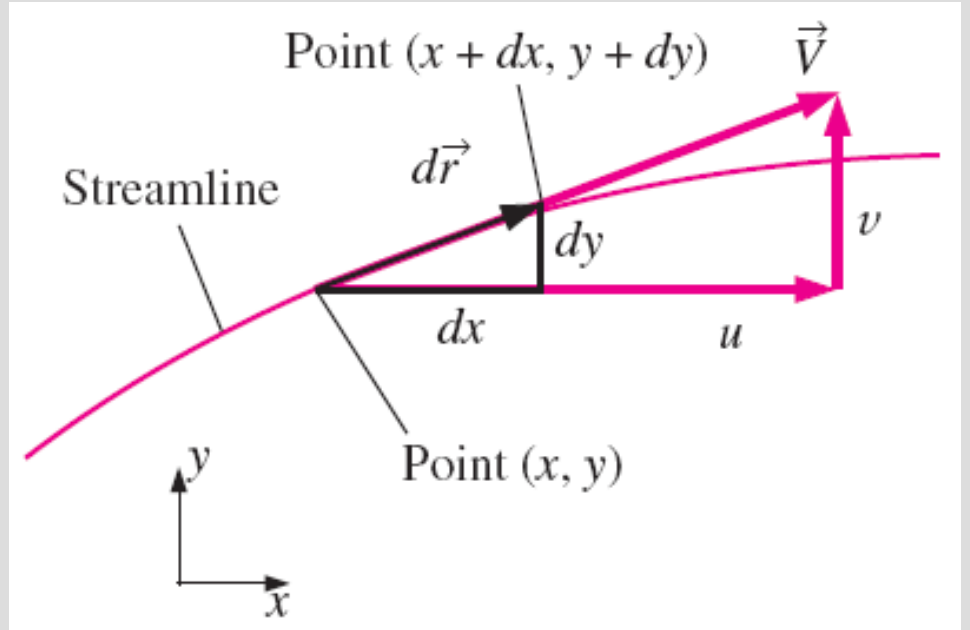
Akım Çizgileri ve Akım Kanalı

Akım çizgisi, her yerde anlık yerel hız vektörüne teğet olan bir eğridir.

Akım çizgileri, akış alanı boyunca akışkan **hareketinin anlık yönlerini** göstermeleri bakımından oldukça kullanışlıdır.

Örneğin sürekli dolanımlı akış bölgeleri ve akışkanın katı bir çeperden ayrılması akım çizgileri deseni yardımıyla kolaylıkla saptanabilir.

Akım çizgileri, yörünge çizgileri ve çıkış ile çakıştığı daimi akış alanları hariç olmak üzere, deneysel yolla doğrudan gözlenmez.



uv-düzleminde iki-boyutlu akış için bir akım çizgisi boyunca yay uzunluğu $dr = (dx, dy)$, her yerde anlık yerel hız vektörü $\vec{V} = (u, v)$ 'ye teğettir.

Consider an infinitesimal arc length $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ along a streamline; $d\vec{r}$ must be parallel to the local velocity vector $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ by definition of the streamline. By simple geometric arguments using similar triangles, we know that the components of $d\vec{r}$ must be proportional to those of \vec{V} (Fig. 4–16). Hence,

$$\text{Equation for a streamline:} \quad \frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (4-15)$$

where dr is the magnitude of $d\vec{r}$ and V is the speed, the magnitude of velocity vector \vec{V} . Equation 4–15 is illustrated in two dimensions for simplicity in Fig. 4–16. For a known velocity field, we integrate Eq. 4–15 to obtain equations for the streamlines. In two dimensions, (x, y) , (u, v) , the following differential equation is obtained:

$$\text{Streamline in the } xy\text{-plane:} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{along a streamline}} = \frac{v}{u} \quad (4-16)$$

In some simple cases, Eq. 4–16 may be solvable analytically; in the general case, it must be solved numerically. In either case, an arbitrary constant of integration appears. Each chosen value of the constant represents a different streamline. The *family* of curves that satisfy Eq. 4–16 therefore represents streamlines of the flow field.

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$$

EXAMPLE 4-4 Streamlines in the xy -Plane—An Analytical Solution

For the steady, incompressible, two-dimensional velocity field of Example 4-1, plot several streamlines in the right half of the flow ($x > 0$) and compare to the velocity vectors plotted in Fig. 4-4.

SOLUTION An analytical expression for streamlines is to be generated and plotted in the upper-right quadrant.

Assumptions **1** The flow is steady and incompressible. **2** The flow is two-dimensional, implying no z -component of velocity and no variation of u or v with z .

Analysis Equation 4-16 is applicable here; thus, along a streamline,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{1.5 - 0.8y}{0.5 + 0.8x}$$

We solve this differential equation by separation of variables:

$$\frac{dy}{1.5 - 0.8y} = \frac{dx}{0.5 + 0.8x} \rightarrow \int \frac{dy}{1.5 - 0.8y} = \int \frac{dx}{0.5 + 0.8x}$$

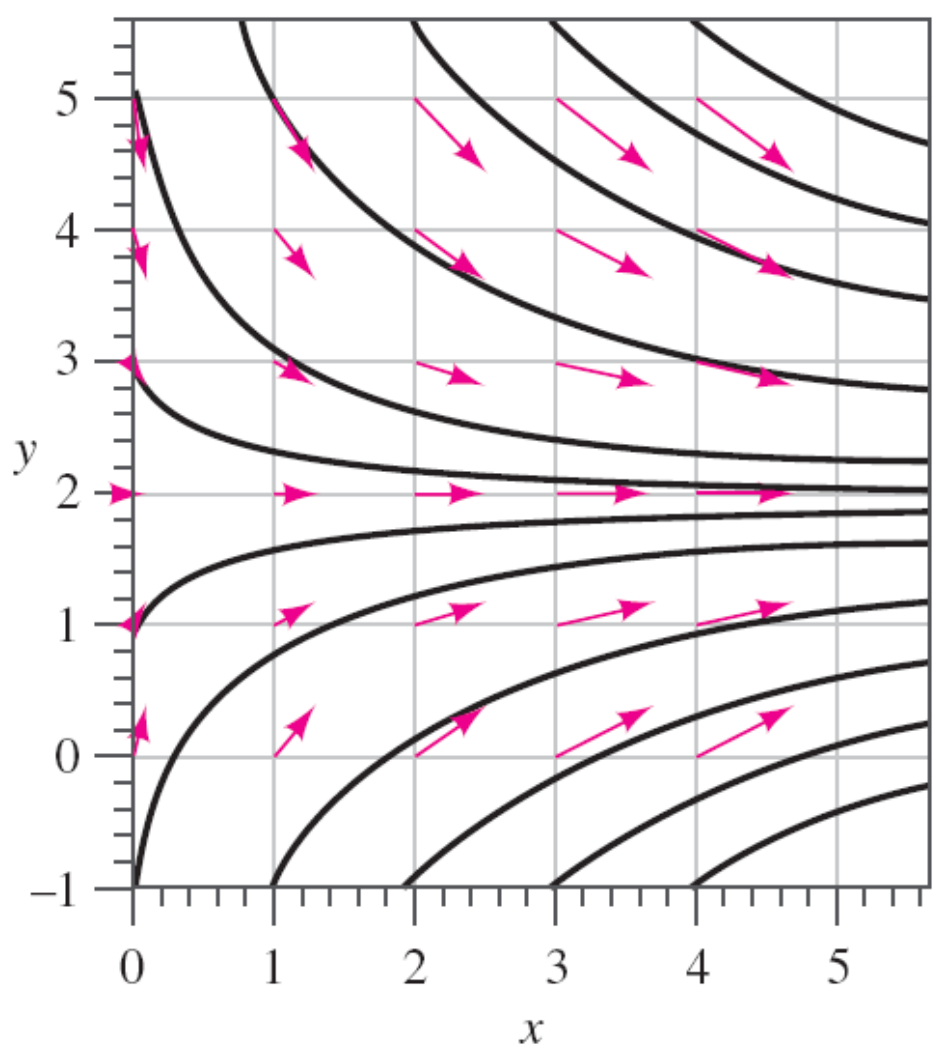
After some algebra, we solve for y as a function of x along a streamline,

$$y = \frac{C}{0.8(0.5 + 0.8x)} + 1.875$$

where C is a constant of integration that can be set to various values in order to plot the streamlines. Several streamlines of the given flow field are shown in Fig. 4-17.

Düzgün sıkıştırılmaz bir hız alanı için akım çizgileri

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$$



Örnek 4-4'teki hız alanına ait akım çizgileri (siyah eğriler); karşılaştırma için Şekil 4.1 'deki hız vektörleri de (kırmızı oklar) akım çizgilerinin üzerine eklenmiştir.

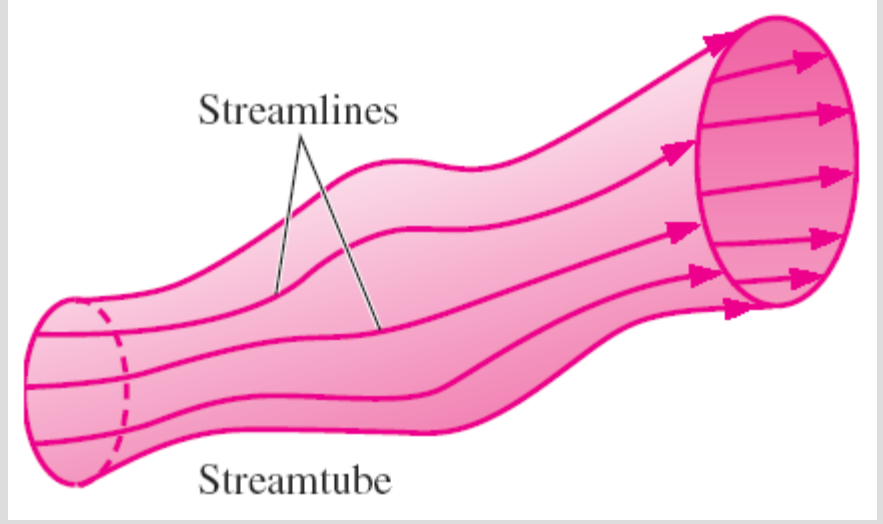
Hız vektör noktalarının akım çizgilerine teğet oldukları noktalardaki uyum mükemmeldir. Hızın direkt olarak akım çizgilerinden belirlenemeyeceği unutulmamalıdır.

Fiber-optik kablo demetlerinden oluşan haberleşme kabloları gibi, **akım tüpü** de akım çizgileri demetinden oluşur

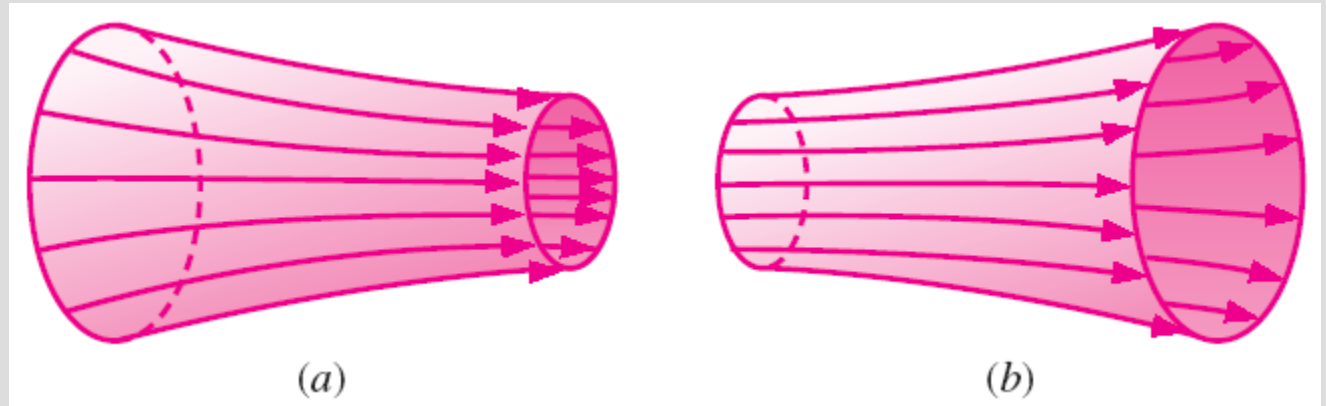
Akım çizgileri, her yerde yerel hıza paralel olduğundan, tanım gereği akışkan bir akım çizgisinin bir tarafından diğer tarafına geçemez.

Bir akım tüpü içerisindeki akışkan içeride kalır ve akını tüpünün sınırını geçemez.

Hem akım çizgilerinin hem de akım tüplerinin anlık büyüklükler olduğunu ve belirli bir andaki hız alanına göre tanımladıklarını haftanızdan çıkarmayınız.



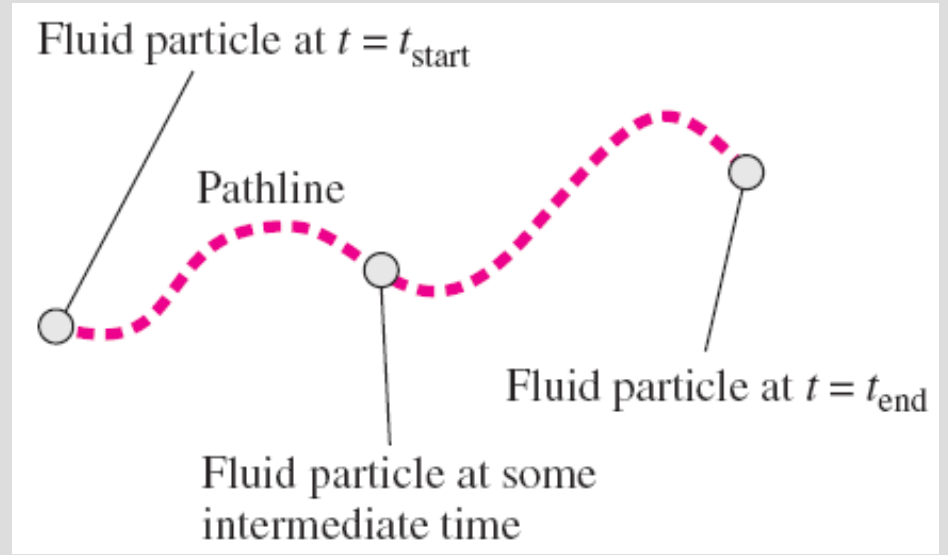
Akım tüpü ayrı ayrı akım çizgilerinden oluşmuş bir akım çizgileri demetidir.



Sıkıştırılamaz bir akış alanında akım tüpünün çapı *a) akış hızlandıkça küçülür (b) akış yavaşladıkça artar.*

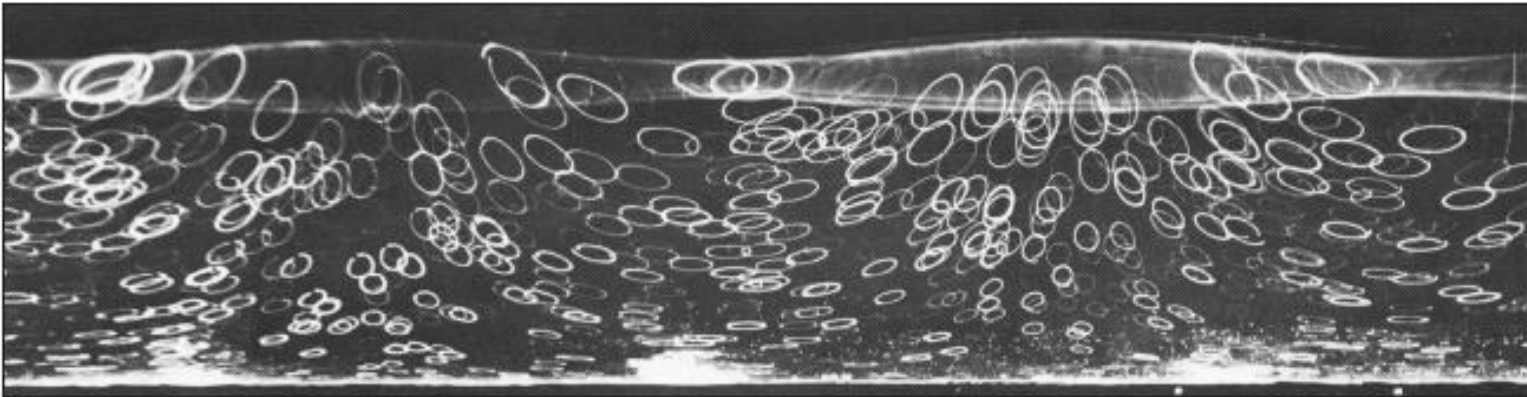
Yörünge Çizgileri

- Yörünge çizgisi:** Tek bir akışkan parçacığının belirli bir süre boyunca kat ettiği gerçek yoldur.
- Yörünge çizgisi, akış alanı içerisinde hareket eden bir akışkan parçacığının yörüngesini izlediğimiz bir Lagrange kavramıdır .
- Bu nedenle yörünge çizgisi, bir akışkan parçacığının sonlu bir zaman aralığında izinin sürülmesi ile elde edilen maddesel konum vektörü ($x_{\text{particle}}(t)$, $y_{\text{particle}}(t)$, $z_{\text{particle}}(t)$) sonlu zaman aralığında hesaplanır.



Tek bir akışkan parçacığının belirli bir süre boyunca kat ettiği gerçek yoldur.

Şekildeki yörünge çizgileri, suda asılı beyaz izli parçacıklar ile oluşturulmuş uzun süreli pozlama tekniği ile fotoğraflanmıştır. Dalgalar bir dalga periyodu boyunca yatay olarak geçtikçe, her bir aynı parçacık eliptik bir yörünge üzerinde hareket etmektedir.



Parçacık görüntülü hız ölçümü (PIV), modern deneysel tekniğidir, akış içerisindeki bir düzlem boyunca hız alanını ölçmek için parçacıkların yörünge çizgilerinden yararlanır.

Son gelişmeler ile teknik üç boyuta da genişletilmiştir.

PIV 'de, izli küçük parçacıklar akışkan içerisinde asılı kalmaktadır. Bununla birlikte burada, film ya da fotosensör üzerinde hareket eden her bir ayrı parçacığa ait iki parlak nokta oluşturmak üzere akış iki ışık kaynağı ile (Şekilde gösterildiği gibi genellikle lazerle) aydınlatılır.

Daha sonra izleyici parçacıkların akış ile birlikte hareket edecek kadar küçük oldukları varsayımıyla, parçacığın her bir konumundaki hız vektörlerinin yönü ve büyüklükleri elde edilebilir.

Modern dijital fotoğrafçılık ve hızlı bilgisayarlar, PIV 'in bir akış alanının daimi olmayan özelliklerinin bile ölçümünü mümkün kılacak şekilde yeterince hızlı gerçekleştirilebilmesini sağlamıştır.

PIV'nin. rüzgar
tünelindeki bir
model arabaya
uygulanması.



Verilen bir hız alanı için yörünge çizgileri sayısal olarak da hesaplanabilir. İzli parçacığın konumu, birii başlangıç konumundan ve t başlangıç zamanından belirli bir t zamanına kadar integre edilir:

$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{start}} + \int_{t_{\text{start}}}^t \vec{V} dt$$

Bu denklem, $t_{\text{başlangıç}}$ ve t_{son} arasındaki bir t zamanı için hesaplandığında, bu zaman aralığındaki $x(t)$ eğrisi akışkan parçacığının izlediği yörünge çizgisi olur. Bazı basit akış alanları için yukarıdaki denklem analitik olarak hesaplanabilir. Ancak daha karmaşık akışlar için sayısal integrasyon yapılmalıdır.

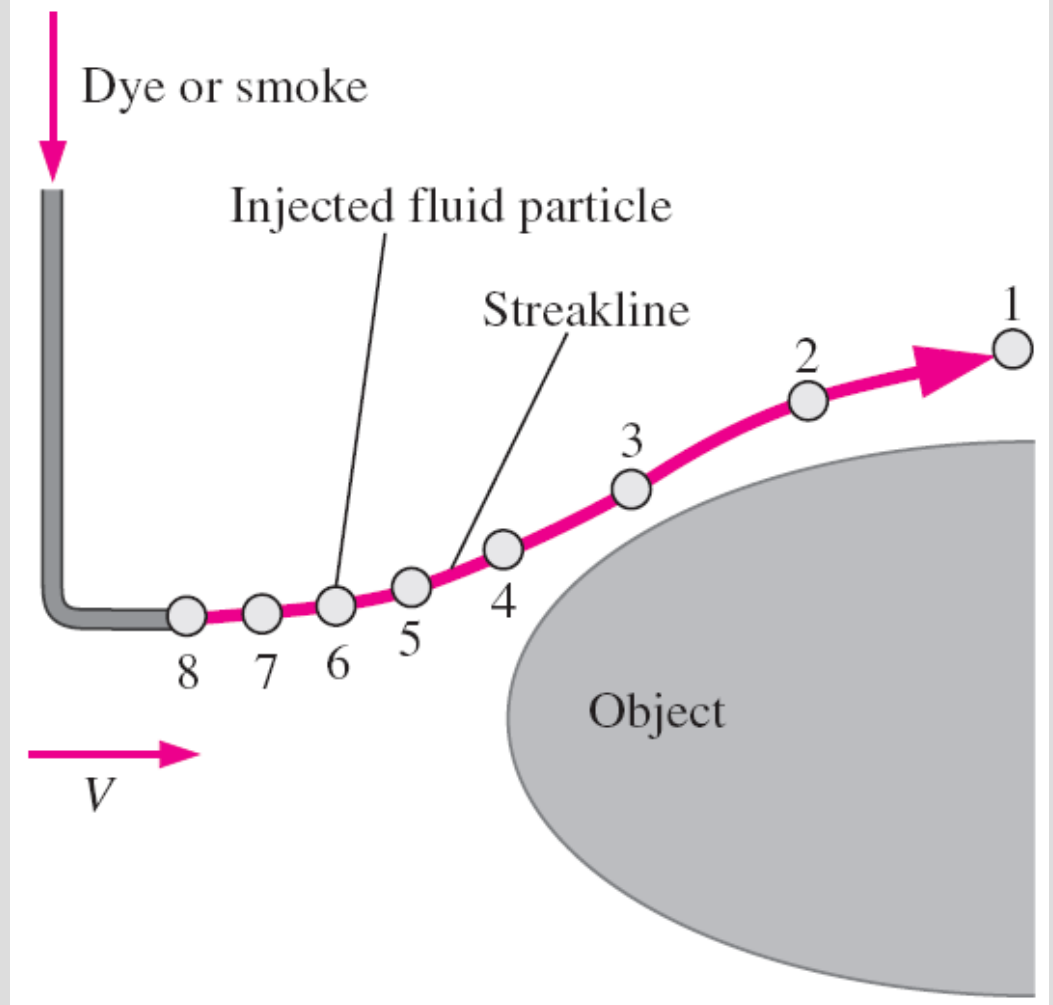
Akış daimi olduğunda her bir akışkan parçacığı akım çizgilerini izleyecektir. Bu nedenle daimi akışlarda yörünge çizgileri akım çizgileri ile aynıdır.

Çıkış çizgileri

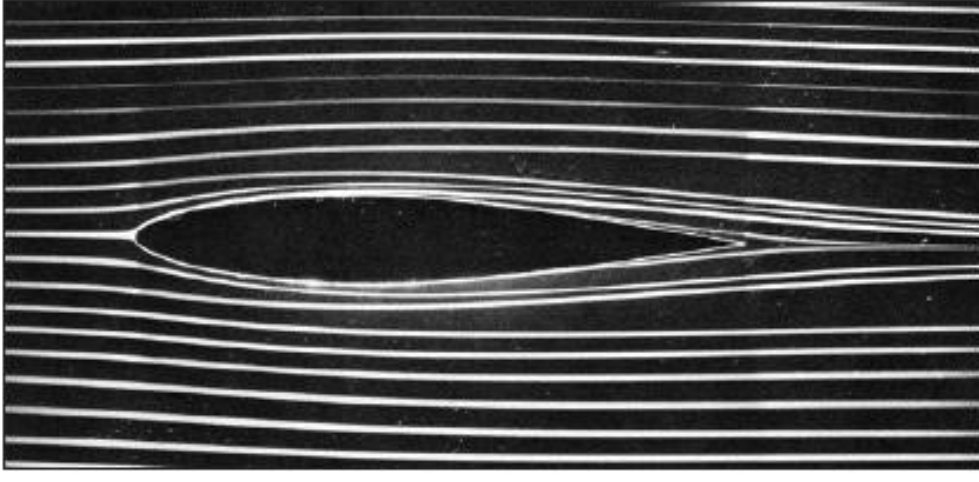
Çıkış çizgisi, akış içerisinde belirli bir noktadan daha önce art arda geçmiş akışkan parçacıklarının geometrik yeridir.

Çıkış çizgileri, fiziksel bir deneyde oluşturulan en yaygın akış desendir.

Bir akış içerisinde küçük bir tüp yerleştirir ve sürekli bir şekilde izli akışkan (su akışında boya; hava akışında ise duman) akımı gönderirseniz, gözlemleyeceğimiz desen çıkış çizgisidir.



Enjekte edilen akışkan parçacığı Çıkış çizgisi noktadan sürekli olarak boya ya da duman gönderilmesi ile oluşturulur. Numaralandırılmış izli parçacıklar (1'den 8'e kadar) art arda gönderilmiştir.



Yukarı akımdan renkli akışkan gönderilerek oluşturulmuş çıkış çizgileri; akış daimi olduğundan bu çıkış çizgileri, akım çizgileri ve yörünge çizgileri ile aynıdır.

Çıkış çizgileri çoğunlukla akım çizgileri ve yörünge çizgileri ile karıştırılır. Bu üç akış deseni, daimi akışta birbirleri ile aynı olmasına karşın daimi olmayan akışta birbirlerinden oldukça farklı olabilir. Temel farklılık, akım çizgilerinin verilen bir andaki anlık akış desenleri olmasına karşın, çıkış ve yörünge çizgilerinin bir zaman geçmiş ve dolayısıyla yaşı bulunan akış desenleri olmasından ileri gelmektedir.

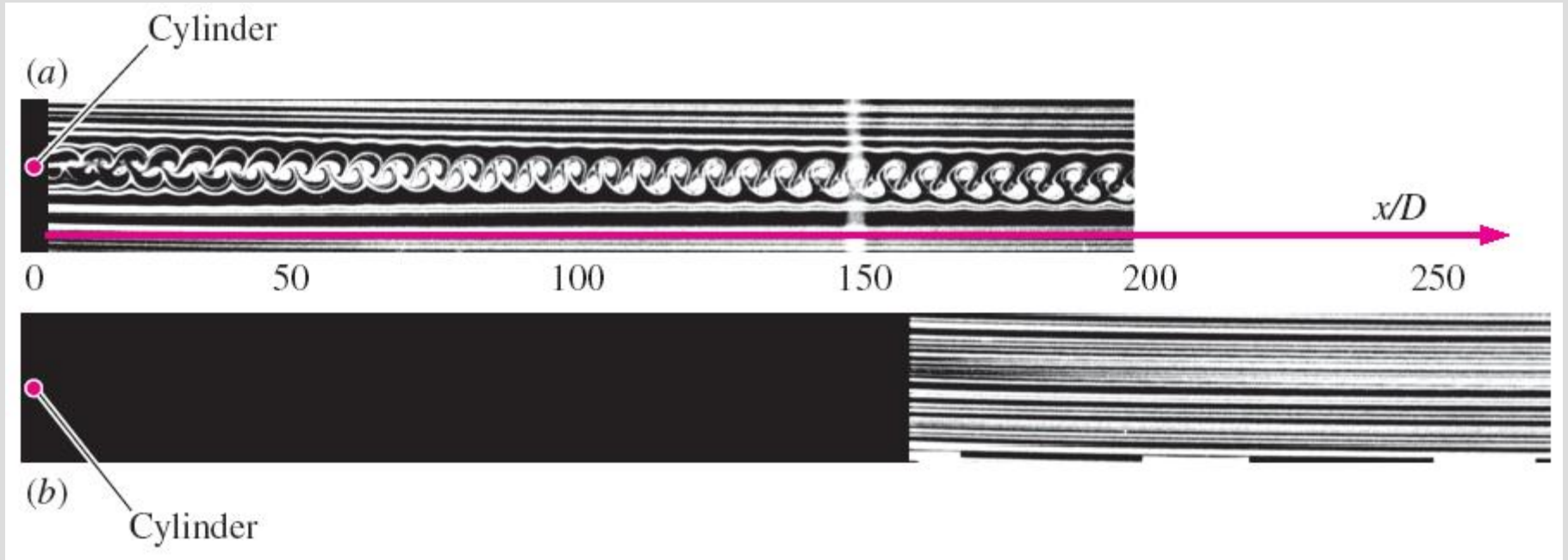
Çıkış çizgisi, zaman-integrali (belirli bir zaman süresinde oluşan) bir akış deseninin anlık görüntüsüdür.

Diğer yandan **yörünge çizgisi** tek bir parçacığın belirli bir zaman periyodu boyunca izlediği akış yörüngesidir.

Akış çizgileri, görüntü düzlemine dik yerleştirilen D çapındaki bir silindirin hemen aşağı akımına yerleştirilmiş bir duman telinden gönderilmektedir.

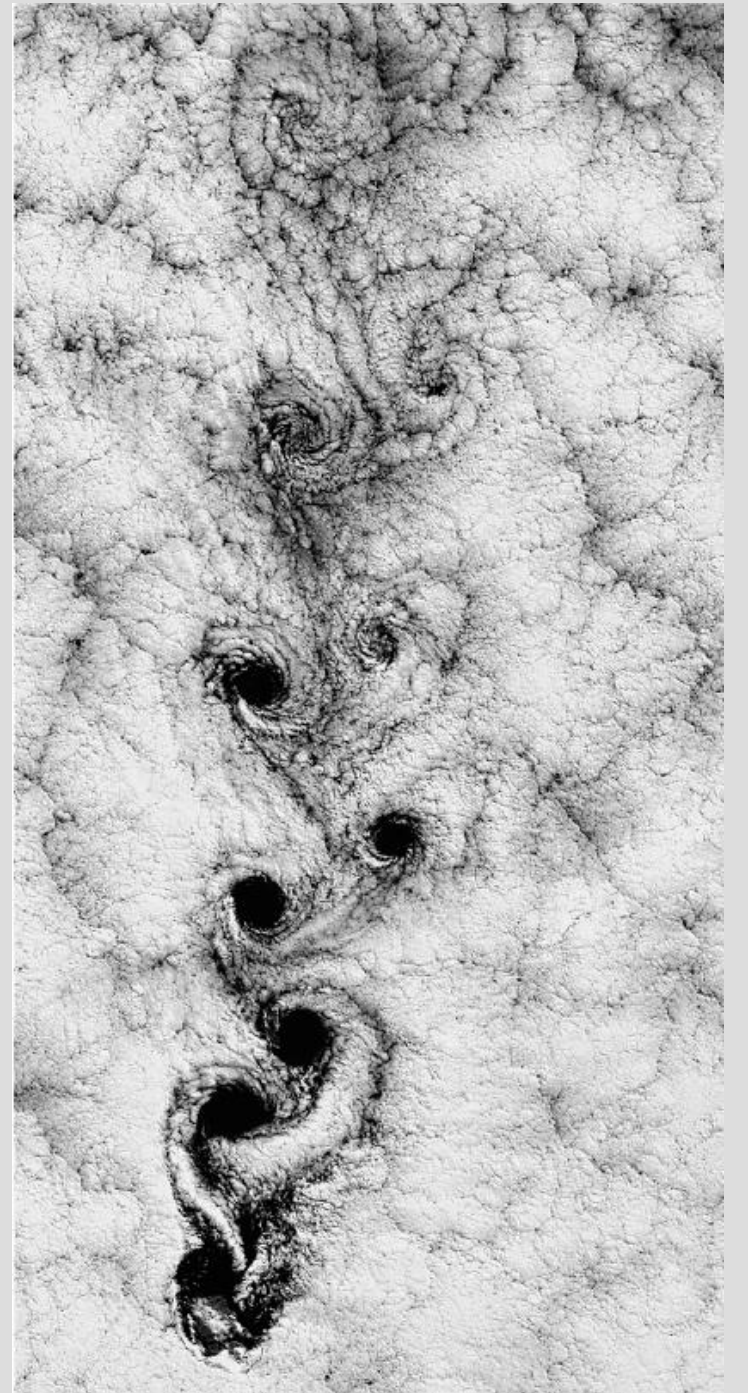
Şekildeki gibi, bir çizgi boyunca birden fazla çıkış çizgisi gönderildiğinde oluşan görüntüye **çıkış çizgileri tarağı** denir.

Akışın Reynolds sayısı $Re = 93$.



Dairesel bir silindirin art izinde iki farklı noktaya yerleştirilmiş duman teli ile oluşturulan duman çıkış çizgileri: (a) Silindirin hemen aşağı akımındaki duman teli (b) $x/D = 150$ de yerleştirilmiş duman teli. Çıkış çizgilerinin zaman-integrasyon doğası her iki fotoğraftan da açıkça görülebilir.

Pasifik Okyanusunun
güneyindeki Selkirk
adasının izindeki
bulutlardaki görülebilir
Kármán girdapları.



For a known velocity field, a streakline can be generated numerically. We need to follow the paths of a continuous stream of tracer particles from the time of their injection into the flow until the present time, using Eq. 4–17. Mathematically, the location of a tracer particle is integrated over time from the time of its injection t_{inject} to the present time t_{present} . Equation 4–17 becomes

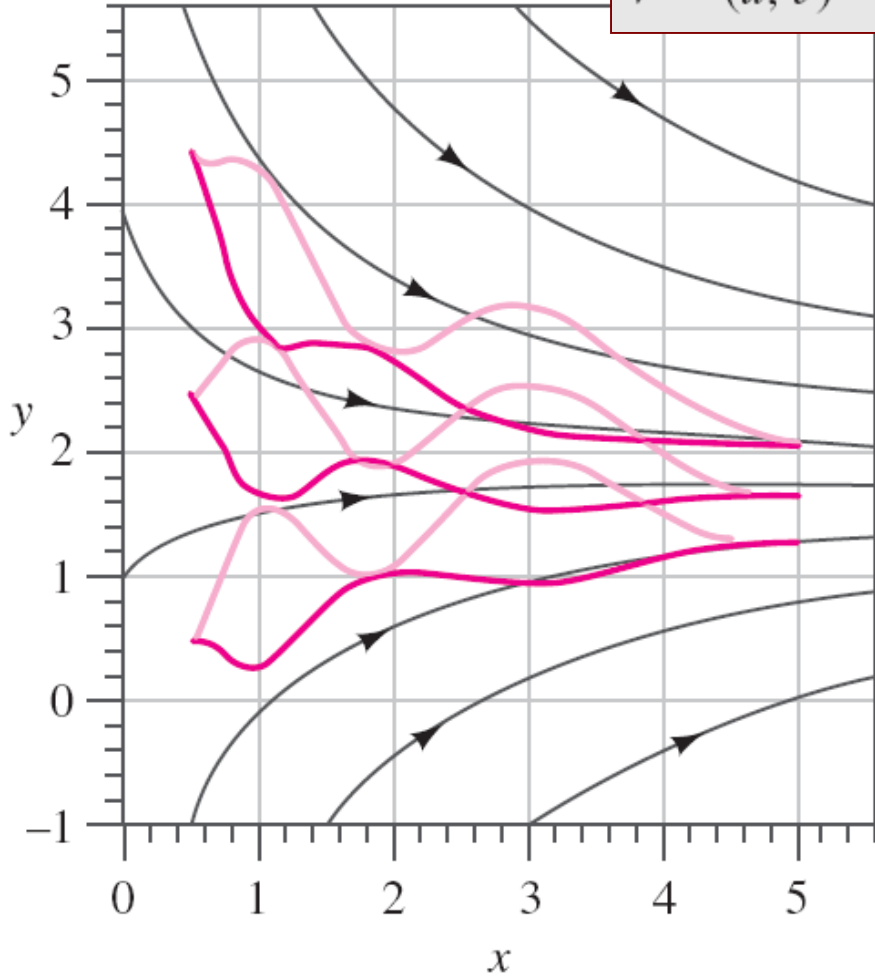
Integrated tracer particle location:
$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{injection}} + \int_{t_{\text{inject}}}^{t_{\text{present}}} \vec{V} dt \quad (4-18)$$

In a complex unsteady flow, the time integration must be performed numerically as the velocity field changes with time. When the locus of tracer particle locations at $t = t_{\text{present}}$ is connected by a smooth curve, the result is the desired streakline.

Tracer particle location at time t:
$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{start}} + \int_{t_{\text{start}}}^t \vec{V} dt \quad (4-17)$$

Daimi Olmayan Bir Akışta Akış Desenlerinin Karşılaştırılması

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 + 2.5 \sin(\omega t) - 0.8y)\vec{j}$$



- Streamlines at $t = 2$ s
- Pathlines for $0 < t < 2$ s
- Streaklines for $0 < t < 2$ s

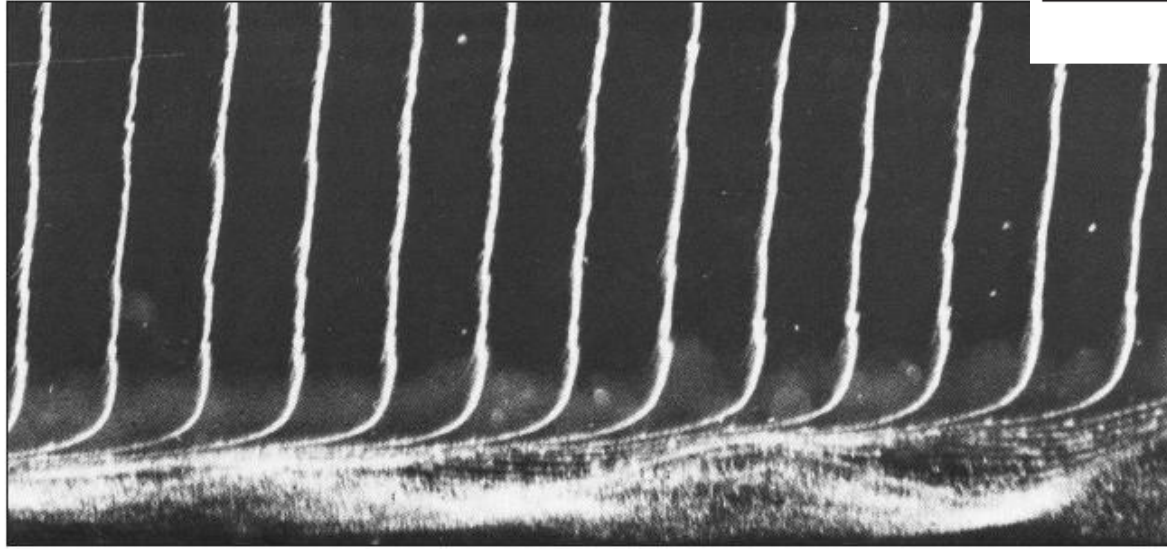
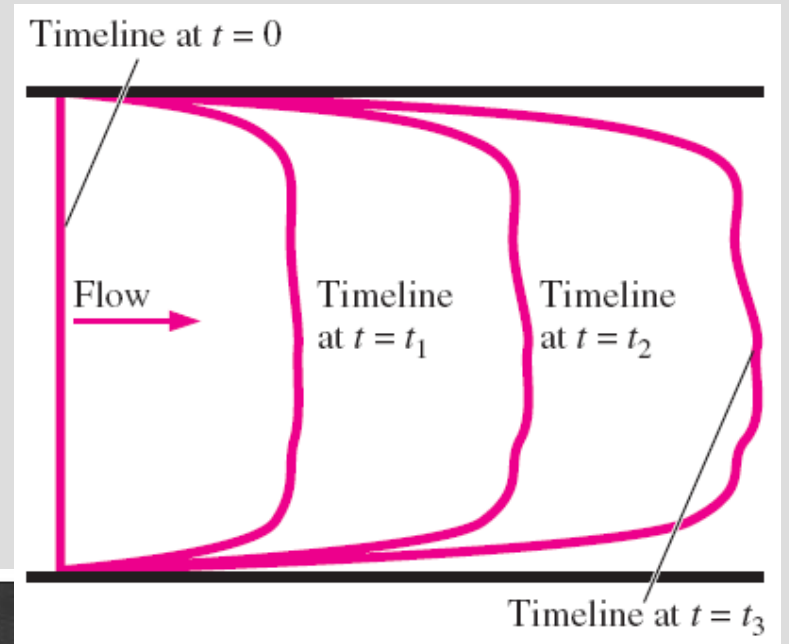
Daimi olmayan sıkıştırılmaz iki boyutlu hız alanı

Örnek 4-5 'teki salınan hız alanına ait akım çizgileri, yörünge çizgileri ve çıkış çizgileri. Çıkış çizgileri ve yörünge çizgileri zamana göre integre edilerek elde edildiğinden dalgalıdır. Buna karşın, akım çizgileri hız alanının anlık bir görüntüsünü temsil ettiği için dalgalı değildir.

Zaman Çizgileri

Zaman çizgisi: (Daha önceden) aynı anda işaretlenmiş ardışık akışkan parçacıklarının bir kümesidir.

Zaman çizgileri, özellikle akışın üniform olup olmadığının inceleneceği durumlarda faydalıdır.



Zaman çizgileri, akışkan parçacıkları düz bir çizgi şeklinde işaretlenerek ve daha sonra bu çizginin akış alanındaki hareketi (ve şekil değiştirmesi) izlenerek oluşturulur; Zaman çizgileri $t = 0, t_1, t_2,$ ve t_3 gösterilmiştir.

Hidrojen kabarcığı telinden gönderilen zaman çizgileri sınır tabaka hız profilinin yapısını görselleştirmek için kullanılmaktadır. Akış soldan sağa doğrudur ve hidrojen kabarcığı teli, görüntünün sol tarafına yerleştirilmiştir. Çepere yakın bölgelerdeki kabarcıklar, akıştaki türbülansı başlatan kararsızlığı göstermektedir.

Akış görselleştirme teknikleri

Akış görselleştirmenin bir başka sınıfı da ışık dalgalarının **refraktif özelliğine (kırılma)** dayanır.

Işığın hızı, farklı maddeler içerisinde geçerken veya yoğunluğu değiştiği takdirde aynı madde içerisinde geçerken dahi belirli bir dereceye kadar farklılık gösterebilir. Bir akışkandan kırılma indisi farklı olan bir başka akışkana geçerken ışık ışınları eğilir (kırılır).

Havanın (veya diğer gazların) kırılma indisinin yoğunluk ile değiştiği gerçeğinden yararlanan iki temel akış görselleştirme tekniği vardır: Bunlar gölge grafiği tekniği ve şiliren tekniğidir.

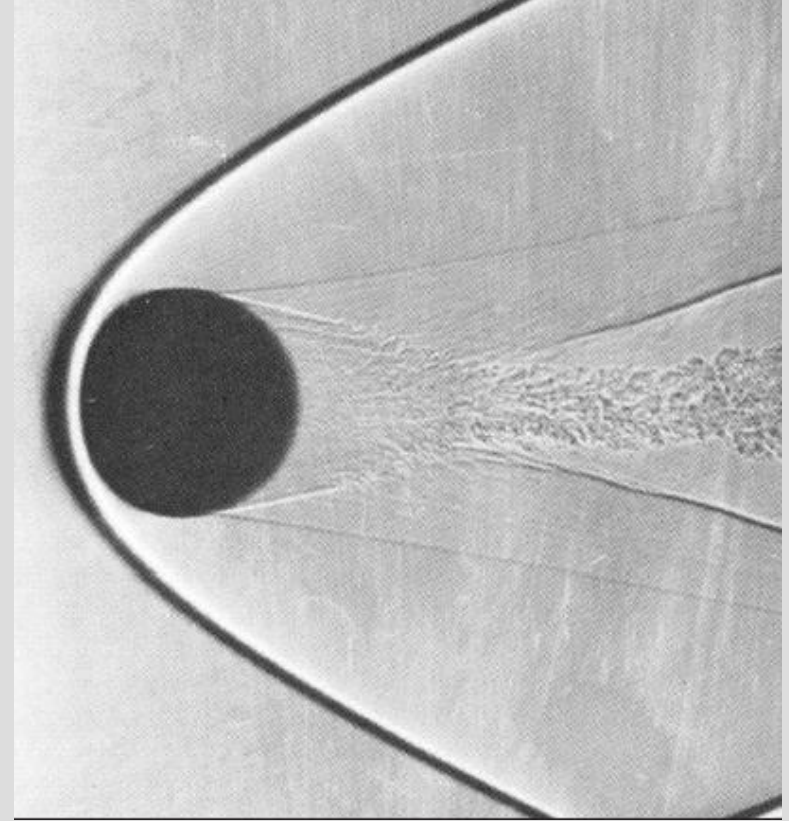
Akış görselleştirmenin esasını teşkil eden interferometre ışığın, yoğunlukları değişen hava içerisinde geçerken uğradığı *faz değişiminden yararlanan bir görselleştirme tekniğidir.*

Tüm bu teknikler sıcaklık farklarının yoğunluk değişimlerine neden olduğu doğal taşınım akışları, akışkan türlerinin yoğunluk değişimlerine neden olduğu karışan akışlar ve şok dalgaları ve genişleme dalgalarının yoğunluk değişimlerine neden olduğu sesi üstü akışlar gibi yoğunluğun akış içerisinde bir konumdan diğer bir konuma değiştiği akış alanlarında akışı görselleştirme için kullanışlıdır.

Çıkış çizgileri, yörünge çizgileri ve zaman çizgileri gibi görselleştirme tekniklerinden farklı olarak, gölge grafiği ve şiliren yöntemlerinde (duman ya da boya gibi) görülebilir bir izin enjekte edilmesine gerek yoktur. Daha çok, yoğunluk farkları ve ışığın refraktif özelliği akış alanındaki hareket bölgelerini görselleştirmek için gerekli araçları sağlar ve "görülme-yeni görmemize" imkan tanır.

Gölge grafiği yönteminde görüntü, kırılan ışık ışınlarının gölgedeki koyu ve açık desenlerini görünür hale getirmek için, gölgenin bir ekrana veya kameranın odak düzlemine düşürülerek tekrar düzenlenmesi ile oluşturulur. Koyu desenler kırılan ışınların başladığı noktaları gösterirken, açık desenler bu ışınların sonlandığı noktaları gösterir, ancak bu yanıltıcı olabilir. Sonuç olarak koyu bölgeler açık bölgelere oranla daha az bozular ve gölge grafiğinin yorumlanmasında daha kullanışlıdır.

Örneğin yandaki gölge grafiğinde, yay şoku dalgasının (koyu bantın) şeklinden ve konumundan emin olabiliriz, ancak kırılan parlak ışık, küre gölgesinin ön kısmının şeklini bozmuştur.



14.3 mm çapındaki bir kürenin $Ma=3.0$ 'de havadaki serbest uçuşuna ait gölge grafiği. Şok dalgası, küre etrafında kavis çizen koyu bir bant biçimindeki gölgede açık bir biçimde görülmektedir buna baş dalgası adı verilir. (Bölüm 12'ye bakınız).

Gölge grafiği gerçek bir optik görüntü değildir; özünde sadece bir gölgedir. Öte yandan, **şiliren görüntüde** mercekler (veya aynalar) ve kırılan ışığı engellemeye yarayan bıçak ağzı veya bunun gibi başka bir kesici düzenek mevcut olup bu görüntü, odaklanmış bir optik görüntüdür.

Şiliren görüntülemenin kurulumu gölge grafiğine göre daha karmaşıktır ancak buna karşın çok sayıda üstünlükleri vardır.

Şiliren görüntülerde kırılan ışık ışımalarının neden olduğu optik şekil bozukluğu bunda yaşanmaz. Bunun yanında şiliren görüntüleme, doğal taşınım veya ses üstü akışlardaki genişleme yelpazeleri gibi yavaş gelişen olaylardan kaynaklanan düşük yoğunluk gradyanlarına karşı daha duyarlıdır.



Barbekü ızgarasındaki doğal taşınımının şiliren görüntüsü.

Yüzey Akışı Görselleştirme Teknikleri

- Katı bir yüzeyin hemen üzerindeki akışın yönü püsküller (iplikçik - tuft) ile görüntülenebilir.
- Püsküller, bir ucu yüzeye yapıştırılmış akış yönünü gösteren kısa ve esnek sicimlerdir. Özellikle akış yönünün aniden tersine döndüğü akış ayrılması bölgelerinin belirlenmesinde kullanışlıdır.
- Yüzey yağı ile akış görselleştirme olarak adlandırılan bir teknik de aynı amaç için kullanılabilir. Burada yüzey üzerine bırakılan yağ, akış yönünü gösteren çizgiler oluşturur.
- Aracınız kirliyen (özellikle kışın yollara tuz dökülmüşken) hafif şiddette yağmur yağdığı anda, arabanızın ön ve yan kaportalarında veya ön camında çizgiler oluştuğunu fark etmişsinizdir. Bu durum, yüzey yağı ile akış görselleştirmedeki gözlemlerle benzerlik gösterir.
- Son olarak, araştırmacılara! katı yüzeyler boyunca olan basınç veya sıcaklık dağılımını gözlemlemesine olanak tanıyan basınç ve sıcaklığa duyarlı boyaların olduğunu da belirtelim.

4-3 ■ AKIŞ VERİLERİNİN ÇİZİMLERİ

Nasıl elde edildiklerine bakılmaksızın (analitik olarak, deneysel olarak ya da sayısal olarak) akış verilerini, genellikle okuyucuya akış özelliklerinin zaman ve/veya konumla nasıl değiştiğine dair bir izlenim verecek şekilde çizmek gerekir.

Özellikle türbülanslı akıflarda (örneğin, zamanın fonksiyonu olarak çizilmiş bir hız bileşeni) ve xy-çizimlerinde (örneğin, basıncın yarıçapın fonksiyonu olarak çizilmesi) kullanışlı olan *zamana göre çizimlere daha önceden zaten aşinasınız.*

Bu kısımda , bunlara ek olarak akışkanlar mekaniğinde kullanışlı olan üç çizim türünü ele alacağız;

profil, vektör ve kontur çizimleri.

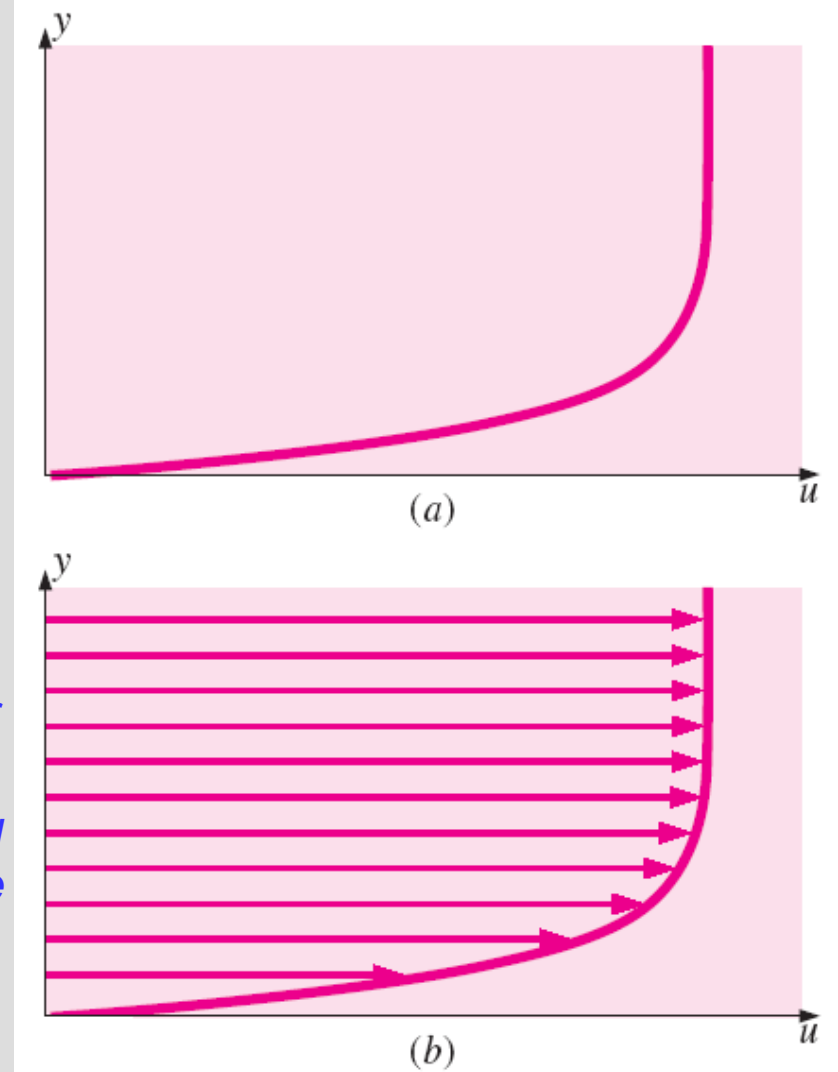
Profil Çizimleri

Profil çizimi, bir skaler özelliğin değerinin akış alanı içerisinde istenen bir yön boyunca nasıl değiştiğini gösterir.

Akışkanlar mekaniğinde herhangi bir skaler değişkenin (basınç, sıcaklık, yoğunluk vs.) profil çizimi oluşturulabilir, ancak bu kitapta en çok **hız profili çizimleri** kullanılmıştır.

Hız vektörel bir büyüklük olduğundan, genellikle ya hızın büyüklüğünün ya da arzu edilen bir yönde mesafenin fonksiyonu olarak hız vektörü bileşenlerinden birinin çizildiğine dikkat ediniz.

Yatay düz bir plaka boyunca gelişen sınır tabaka akışında, yatay hız bileşeni *profilin düşey mesafenin fonksiyonu* olarak çizimi: (a) standart profil çizimi ve (b) oklar ile birlikte profil çizimi.



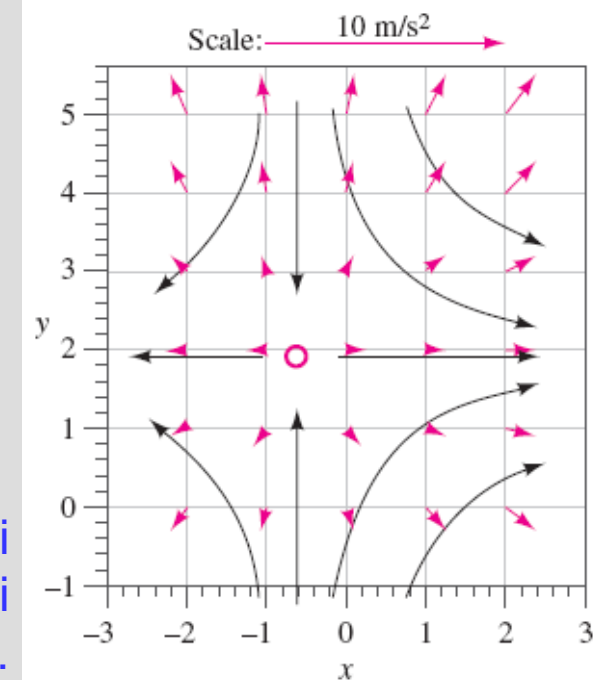
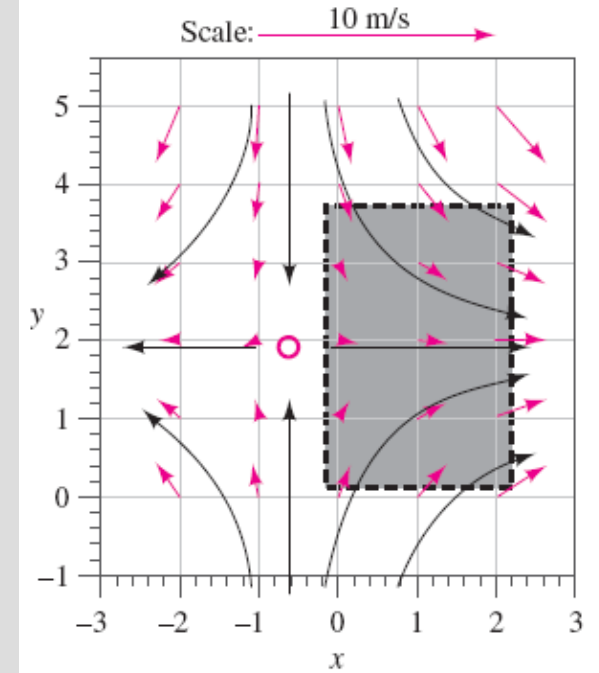
Vektör Çizimi

Vektör çizimi, belirli bir anda vektörel özelliğin yönünü ve şiddetini gösteren oklar dizisidir.

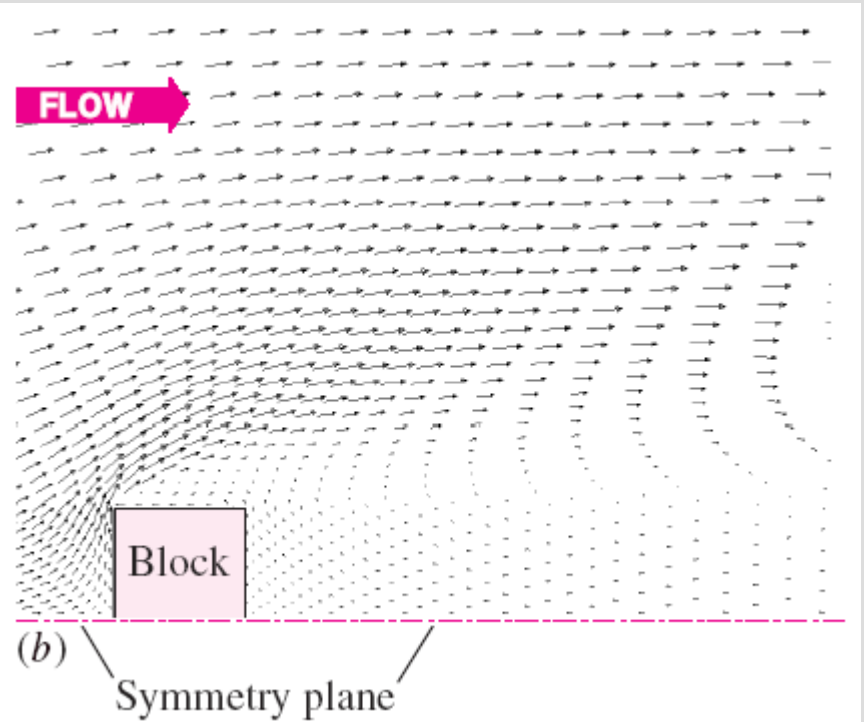
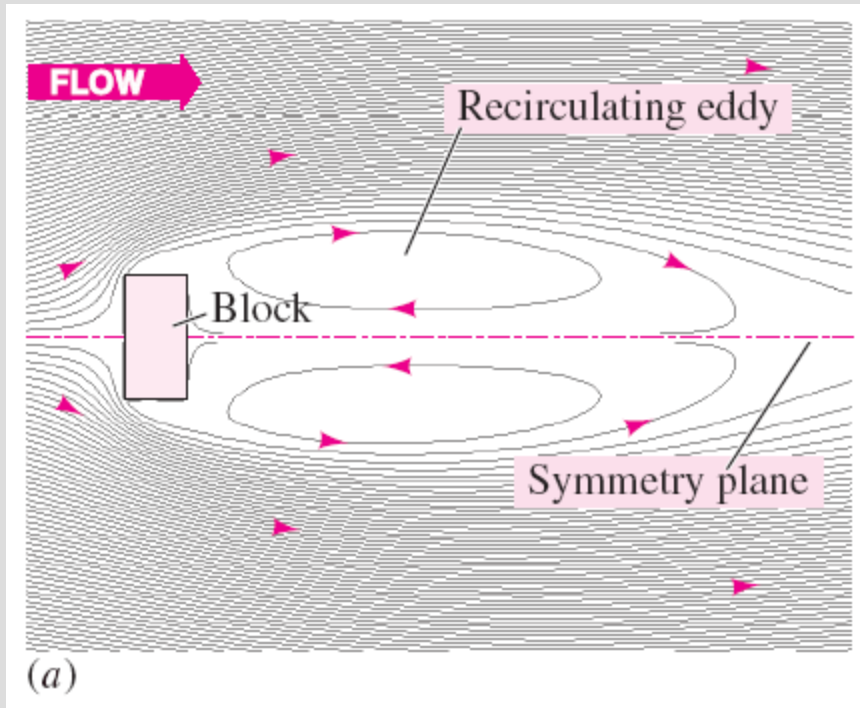
Akım çizgileri anlık hız alanının yönünü gösterirken, hızın şiddetini doğrudan göstermez.

Bundan dolayı, hem deneysel hem de hesaplamalı akışlar için anlık vektörel bir özelliğin hem yönünü hem de şiddetini gösteren oklar dizisinden oluşan vektör çizimleri kullanışlı bir akış desenidir.

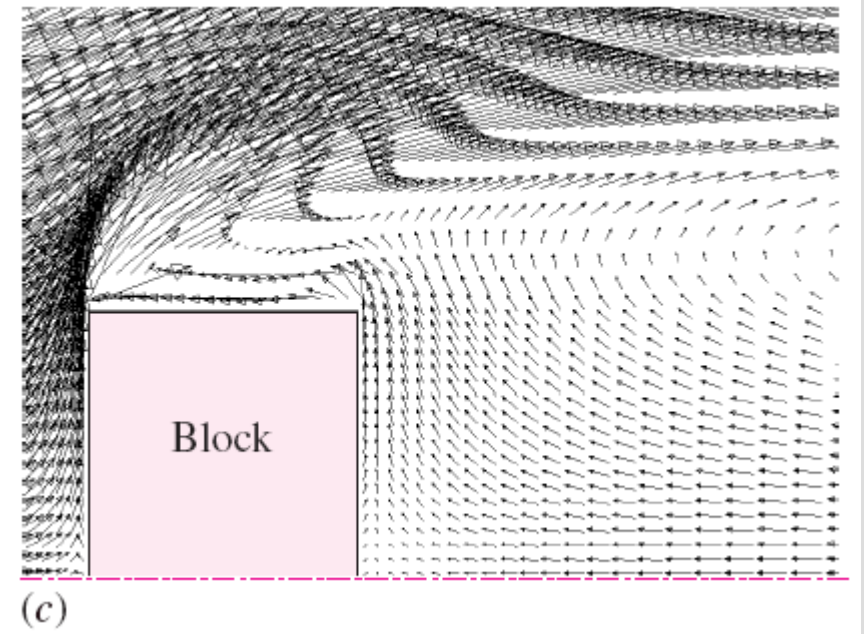
Vektör çizimleri, deneysel olarak elde edilmiş verilerden (örneğin; PIV ölçümlerinden) ya da CFD hesaplamalarından sayısal olarak da elde edilebilir.



Şekil. 4-4: Hız vektörü çizimi
Şekil 4-14: İvme vektörü çizimi
Her ikisi de analitik olarak üretildi.



Bir bloğa çarpan akışın CFD hesaplamalarının sonuçları; a) akım çizgileri, (b) akışın üst yarısına ait hız vektörü çizimi ve (c) yalandan görünümü ile daha fazla ayrıntı veren hız vektörü çizimi.



Kontur Çizimleri

Kontur çizimi, belirli bir andaki sabit skaler özellik (veya sabit vektörel özellik büyüklüğünün) eğrilerini gösterir.

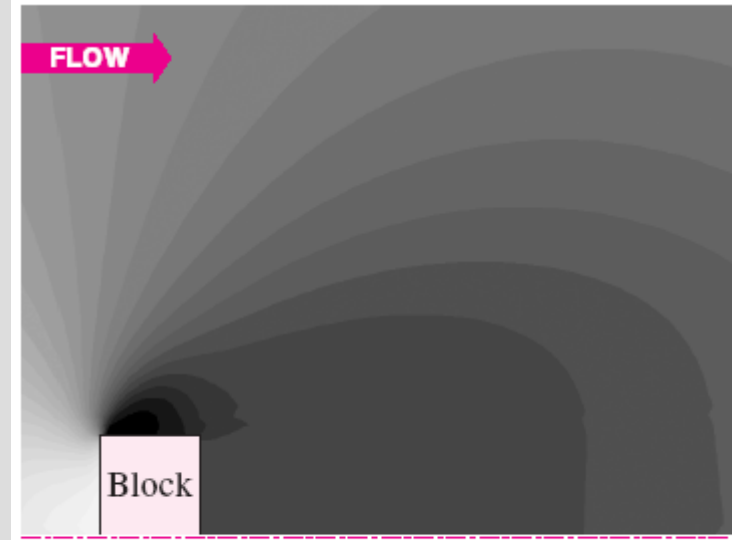
Basınç, sıcaklık, hız büyüklüğü, bileşen konsantrasyonu, türbülans özelliklerinin kontur çizimleri (diğer adıyla **izokontur çizimleri**) oluşturulur.

Kontur çizimi, incelenen akış özelliğinin yüksek (veya düşük) değerli bölgelerini hızlı bir biçimde gösterebilir.

Bir kontur çizimi basitçe özelliğin çeşitli seviyelerini gösteren eğrilerden oluşabilir; buna **kontur çizgisi çizimi** denir.

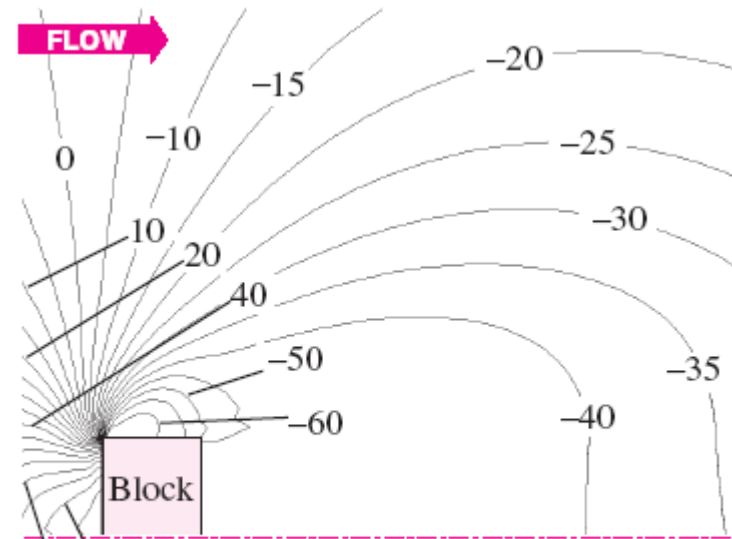
Alternatif olarak, kontur çizimleri, renkler ya da gri tonlu gölgeler ile doldurulabilir; buna **dolu kontur çizimi** denir.

Bir bloğa çarpan akıştan kaynaklanan basınç alanının CFD hesaplamaları ile oluşturulmuş kontur çizimleri; (a) dolu gri ölçekli kontur çizimi (b) basınç değerlerinin Pa (Pascal) biriminde gösterildiği kontur çizgisi çizimi.



Symmetry plane

(a)



60 70

Symmetry plane

(b)

4-4 ■ DİĞER KİNEMATİK TANIMLAMALAR

Akışkan elemanların hareket veya deformasyon şekilleri

Akışkanlar mekaniğinde, katı mekaniğinde olduğu gibi bir eleman dört temel tip harekete veya deformasyona uğrayabilir.

(a) **ötelenme**, (b) **dönme**, (c) **doğrusal şekil değiştirme** (bazen uzama şekil değiştirmesi de denir), ve (d) **kayma şekil değiştirmesi**.

Tüm bu dört tip hareketin veya deformasyonu çoğunlukla aynı anda meydana gelir.

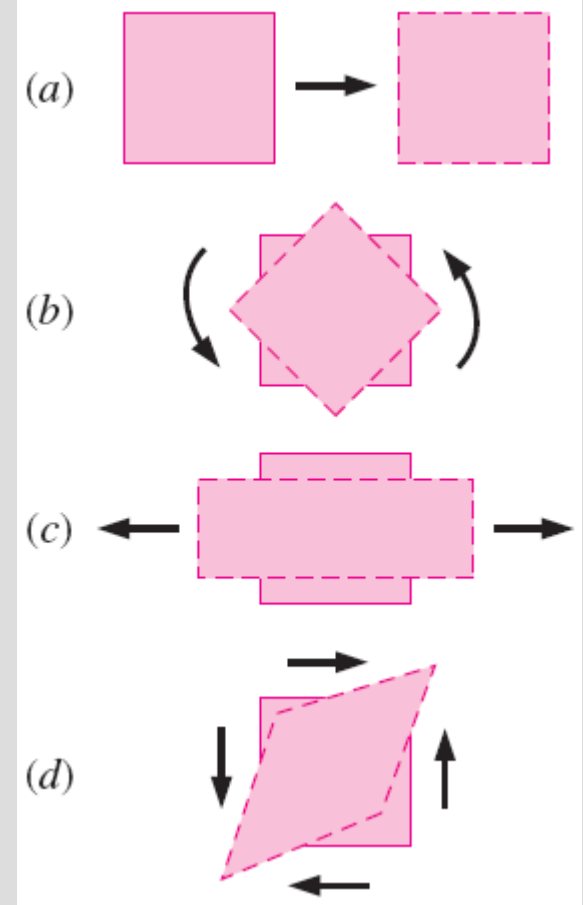
Akışkanlar dinamiğinde akışkan elemanlarının hareketlerinin veya deformasyonlarının *birim zamana göre tarif edilmesi daha uygundur*.

hız (birim zamandaki ötelenme),

açısız hız (birim zamandaki dönme),

doğrusal şekil değiştirme hızı (birim zamandaki doğrusal şekil değiştirme) ve **kayma şekil değiştirmesi hızı** (birim zamandaki kayma şekil değiştirmesi)

Akış hesaplamalarında kullanışlı olabilmeleri için bu deformasyon hızlarını, hız ve hızın türevleri cinsinden ifade etmemiz gerekir.



Akışkan elemanının temel hareket veya deformasyon şekilleri: (a) ötelenme, (b) dönme, (c) doğrusal şekil değiştirme ve (d) kayma şekil değiştirmesi.

Üç-boyutta birim zamandaki ötelenmeyi tam olarak tarif edebilmek için bir vektöre ihtiyacımız vardır. Bu birim zamandaki **ötelenme vektörü**, matematiksel olarak **hız vektörü** şeklinde tanımlanır.

Rate of translation vector in Cartesian coordinates:

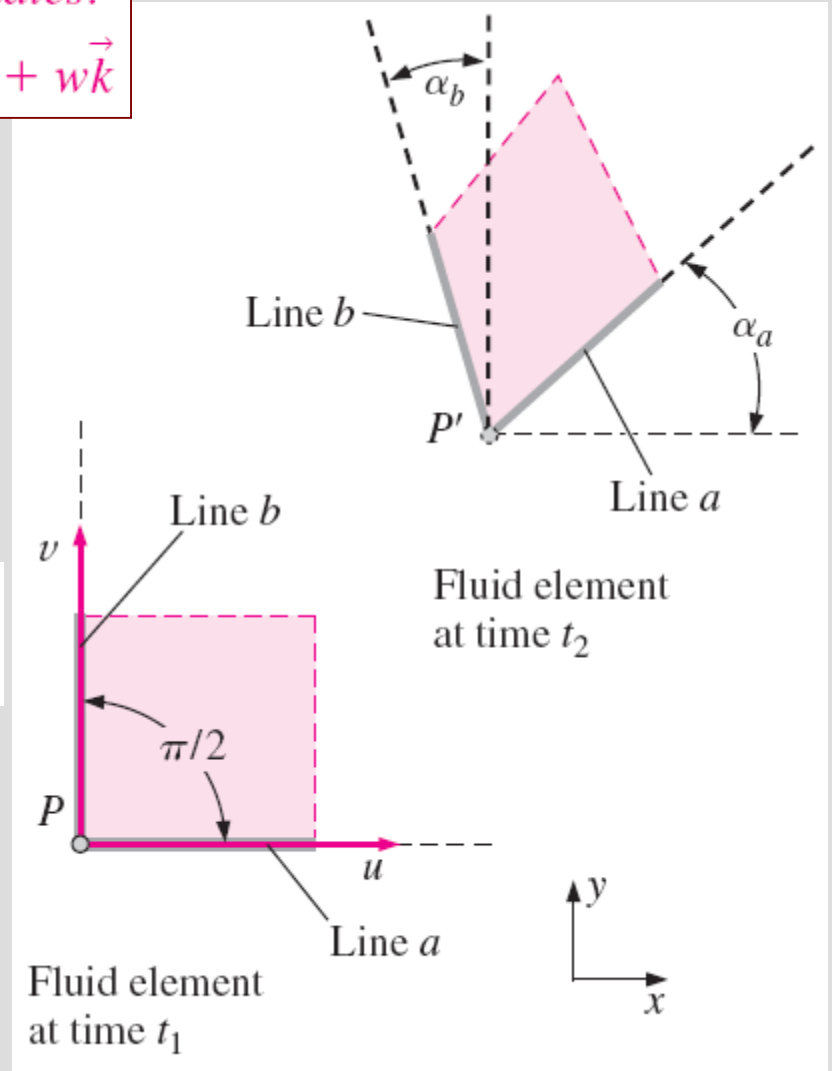
$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Bir noktada birim zamandaki dönme (**açısal hız**), *başlangıçta bu noktada kesişen iki dik çizginin birim zamandaki ortalama dönmesi olarak tanımlanır.*

P noktası civarında akışkanın açısal hızı

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Şekilde çizildiği gibi ötelenen ve deforme olan bir akışkan eleman için *P noktası etrafındaki birim zamandaki dönme, başlangıçta birbirlerine dik olan iki çizginin (a çizgisi ve b çizgisi) ortalama dönmesi olarak tanımlanır.*



Birim zamandaki dönme vektörü, açısal hız vektörüne eşittir

Rate of rotation vector in Cartesian coordinates:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

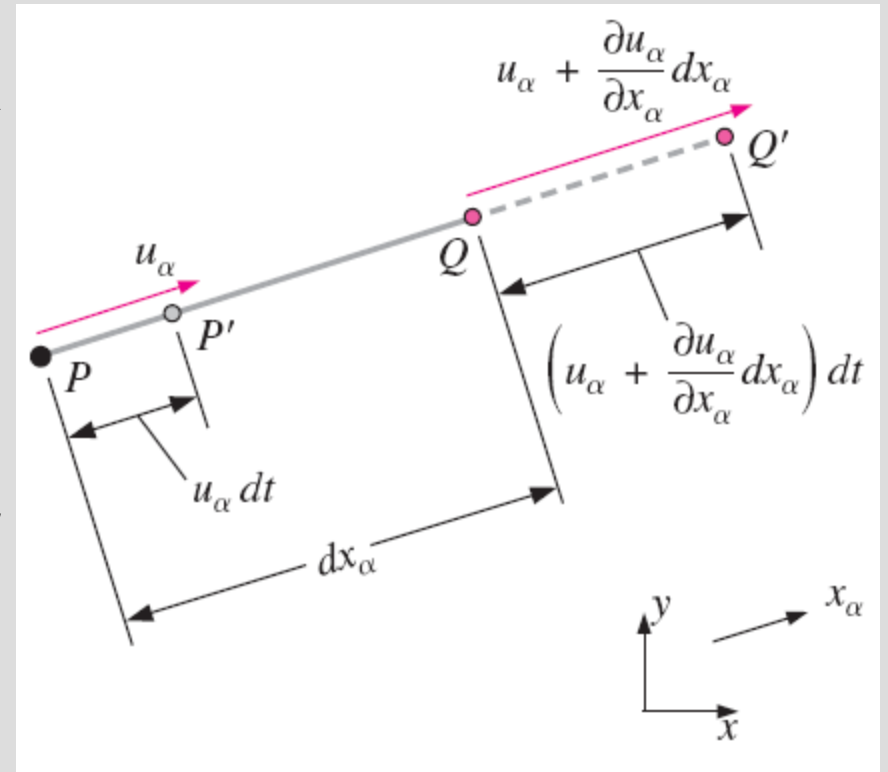
Doğrusal şekil değiştirme hızı, birim uzunluk başına birim zamanda meydana gelen uzunluk artışı şeklinde tanımlanır.

Matematiksel olarak, bir akışkan elemanının doğrusal şekil değiştirme hızı, üzerinde doğrusal şekil değiştirmeyi ölçtüğümüz doğru parçasının başlangıç yönüne bağlıdır; bu yüzden, skaler veya vektörel bir büyüklük olarak tanımlanamaz.

Linear strain rate in Cartesian coordinates:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

u_α gibi keyfî bir yöndeki doğrusal şekil değiştirme hızı, bu yönde birim uzunluk başına birim zamanda meydana gelen uzunluk artışı olarak tanımlanır. Doğru parçası azalıyor olsaydı doğrusal şekil değiştirme hızı negatif olurdu. Burada, pozitif bir şekil değiştirme hızı doğuran PQ doğru parçasının P'Q' doğru parçasına uzamasını incelenmektedir. dx_α ve dt sonsuz küçük olduklarından, hız bileşenleri ve mesafeler birinci-mertebede kesilmiştir.



Şekilde belirtilen uzunlukları kullanarak, x_α – doğrultusundaki doğrusal şekil değiştirme

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ} \right)$$

$$\cong \frac{d}{dt} \left(\frac{\overbrace{\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dt + dx_\alpha - u_\alpha dt}^{\text{Length of } P'Q' \text{ in the } x_\alpha\text{-direction}}}{\underbrace{dx_\alpha}_{\text{Length of } PQ \text{ in the } x_\alpha\text{-direction}}} \right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (4-22)$$

Bir akışkan elemanın birim hacim başına, birim zamanda hacminde meydana gelen artış **hacimsel şekil değiştirme hızı** olarak adlandırılır. Bu kinematik özellik, **hacmin arttığı** durumlar için **pozitif** olarak tanımlanır.

Hacimsel şekil değiştirme hızının bir eş anlamlısı da **hacimsel genişleme (dilatasyon) hızıdır**.

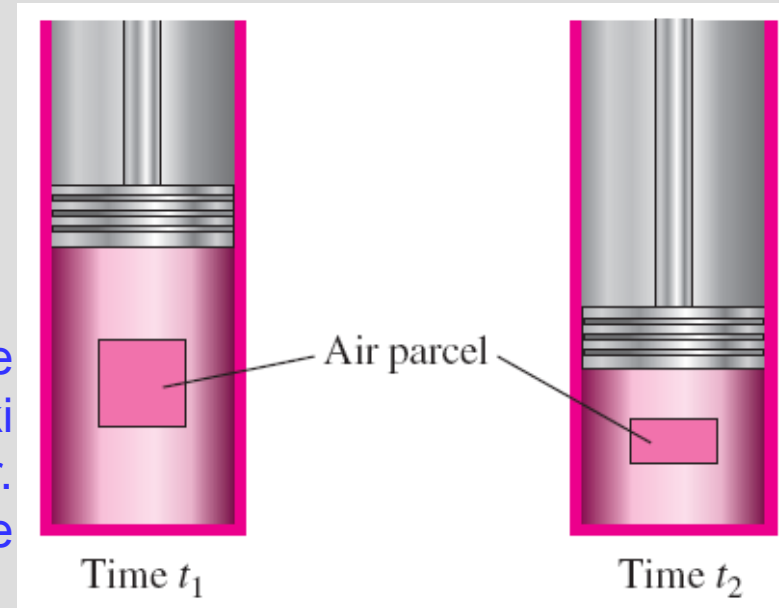
Hacimsel şekil değiştirme hızı, birbirine karşılıklı olarak dik olan üç yöndeki şekil değiştirme hızlarının toplamı olacaktır.

Volumetric strain rate in Cartesian coordinates:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Sıkıştırılamaz bir akışta hacimsel şekil değiştirme hızı sıfırdır.

Bir piston silindir düzeninde sıkıştırılmakta olan hava. Silindirdeki akışkan elemanın hacmi azalmaktadır. Bu durumda hacimsel şekil değiştirme hızı negatiftir.



Bir noktadaki **kayma şekil değiştirmesi hızı**, başlangıçta bu noktada kesişen iki dik çizgi arasındaki açıda birim zamanda meydana gelen azalmanın yarısı olarak tanımlanır.

Kayma şekil değiştirme hızı, birbirine dik olan u ve v yönündeki şekil değiştirme hızlarının toplamıdır.

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha_{a-b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

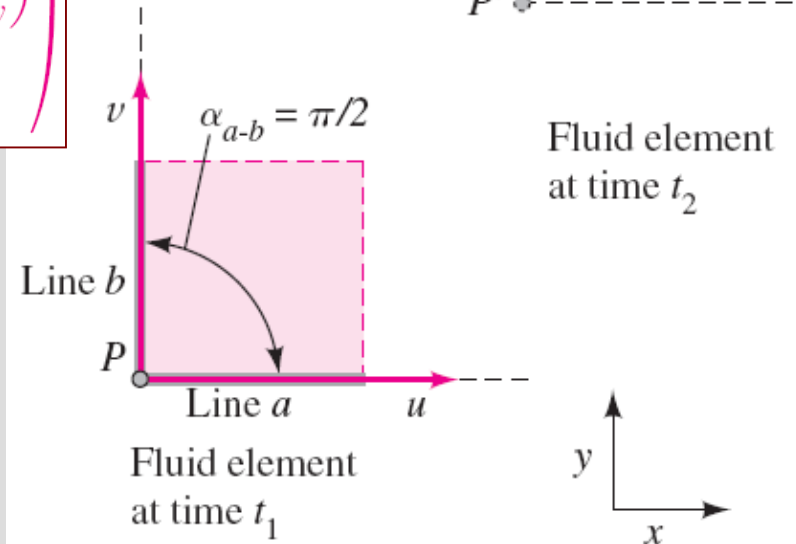
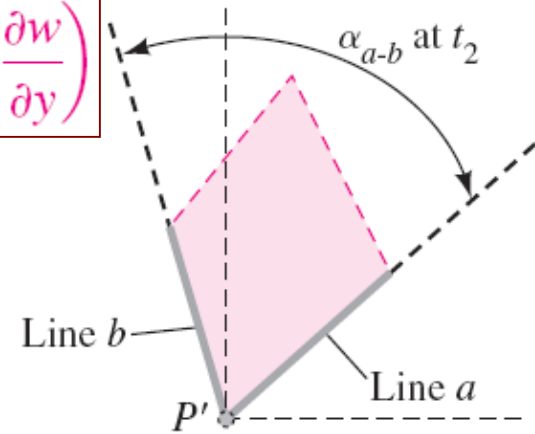
Kartezyen koordinatlardaki kayma şekil değiştirme hızları:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Strain rate tensor in Cartesian coordinates:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Şekilde çizildiği gibi, ötelenen ve şekil değiştiren bir akışkan elemanı için *P* noktasındaki kayma şekil değiştirmesi, (*a* çizgisi ve *b* çizgisi) arasındaki açıda birim zamanda meydana gelen azalmanın yarısı olarak tanımlanır.

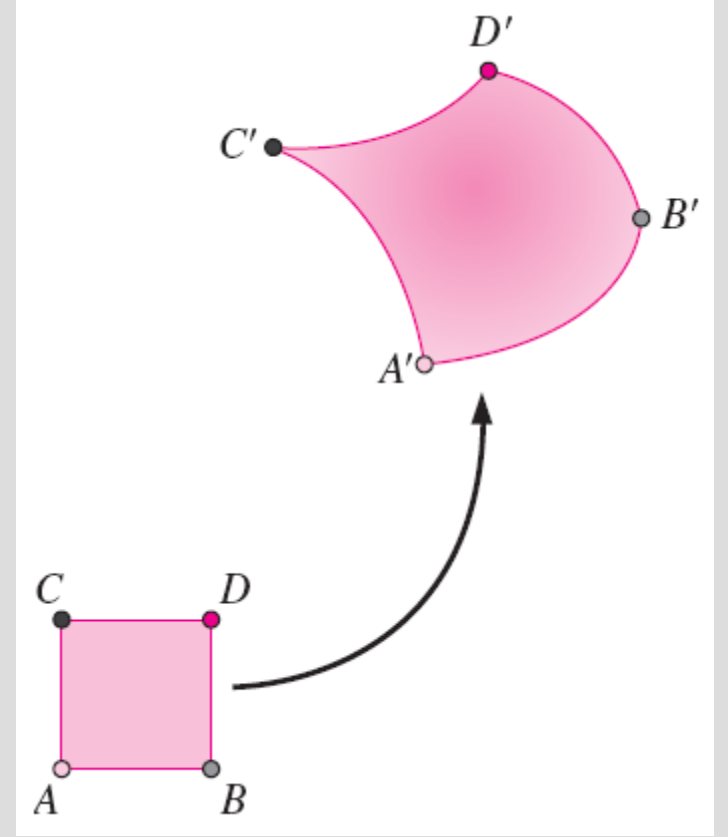


Sıkıştırılabilir bir akışkan akışındaki tüm olası hareketlerin ve şekil değiştirmelerin bir arada olduğu genel bir durumu (iki-boyutlu olmasına rağmen) göstermektedir.

Bu anlamda; ötelenme, dönme, doğrusal şekil değiştirme ve kayma şekil değiştirmesi vardır.

Bunun yanında, akışının sıkıştırılabilir olma niteliğinden ötürü hacimsel şekil değiştirme hızı da (dilatasyon) vardır.

Şimdi akışkanlar dinamiğinin kendine özgü karmaşıklığını ve akışkan akışını tam olarak tanımlayabilmek için gerekli matematiksel derinliği daha iyi anlamış olmalısınız.



Ötelenme, dönme, doğrusal şekil değiştirme, kayma şekil değiştirmesi ve hacimsel şekil değiştirmeyi gösteren bir akışkan elemanı.

ÖRNEK 4-6: İki-Boyutlu Bir Akışta Kinematik Özelliklerin Hesaplanması

Örnek 4-1 'deki daimi, iki-boyutlu hız alanını göz önüne alınız:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j} \quad (1)$$

Burada uzunluklar m. Zaman s ve hızlar m/s birimindedir. Şekilde gösterildiği gibi $(-0.625, 1.875)$ 'te bir durma noktası vardır. Ayrıca akışın akım çizgileri de çizilmiştir. Birim zamandaki ötelenme, birim-zamandaki dönme, doğrusal şekil değiştirme hızı, kayma şekil değiştirme hızı ve hacimsel şekil değiştirme hızı gibi çeşitli kinematik özellikleri hesaplayınız. Akışın sıkıştırılmaz olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : Verilen bir hız alanının bazı kinematik özelliklerini hesaplayacağız ve akış alanının sıkıştırılmaz olduğunu göstereceğiz.

Kabuller: 1 Akış daimidir. 2 Akış iki-boyutludur, yani hızın w bileşeni yoktur ve u veya v , w ile değişmemektedir.

Analiz:

$$u = 0.5 + 0.8x \quad v = 1.5 - 0.8y \quad w = 0$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} (0 - 0) \vec{k} = \mathbf{0}$$

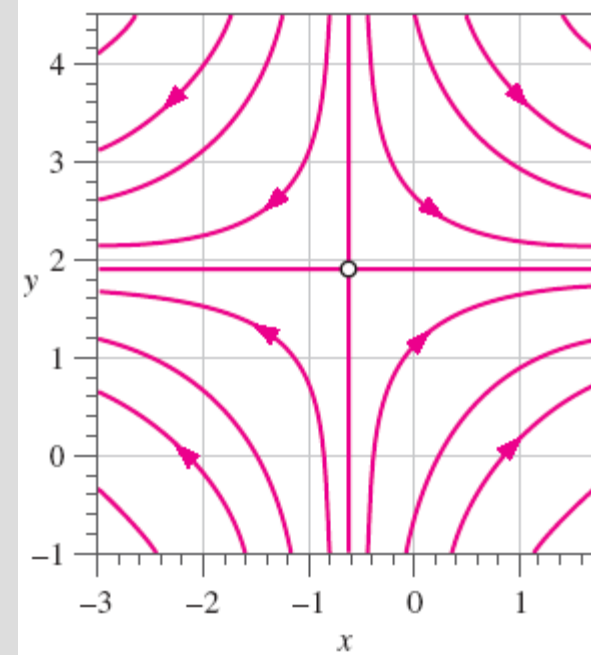


FIGURE 4-41

Streamlines for the velocity field of Example 4-6. The stagnation point is indicated by the circle at $x = -0.625$ m and $y = 1.875$ m.

Doğrusal u , v ve w -yönlerindeki doğrusal şekil değiştirme hızları,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.8 \text{ s}^{-1} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -0.8 \text{ s}^{-1} \quad \varepsilon_{zz} = 0 \quad (4)$$

olarak elde edilir. Bu sonuçla, akışkan parçacıklarının x-yönüne uzadığı (pozitif doğrusal şekil değiştirme) ve y-yönünde büzüldüğü (negatif doğrusal şekil: değiştirme hızı) görülmektedir. Bu durum başlangıçtaki (0.25, 4.25) noktasında bulunan kare şeklindeki bir akışkan parçasının işaretlendiği Şekil 4-42 'de gösterilmiştir.

Denklem-2 'yi zamana göre-integre etmek suretiyle, geçen 1.5 s sonunda işaretli akışkan parçasının dört köşesinin konumu hesaplanmıştır: Gerçekten ön gördüğü gibi;bu akışkan parçası :x yönünde uzamış ve y-yönünde büzülmüştür.

Kayma şekil değiştirmesi aşağıdaki denklemden belirlenir. Akış iki-boyutlu olduğundan, sıfırdan farklı olan; kayma şekil değiştirmesi hızı sadece xy-düzleminde olur.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$

Bu sonuca göre; Şekil 4-4.1 ile de gösterildiği-gibi bu akışta kayma şekil değiştirmesi yoktur.

Hacimsel Şekil değiştirme hızı:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (0.8 - 0.8 + 0) \text{ s}^{-1} = 0 \quad (6)$$

Hacimsel şekil değiştirme hızı her yerde sıfır olduğundan, akışkan parçacıklarının hacmi ne büyüyor (genişliyor) ne de büzülüyor (sıkışıyor) diyebiliriz. Bu sonuçla; akışın sıkıştırılmaz olduğunu kanıtlamış oluyoruz. Şekil 4-41'de, gölgelendirilmiş akışkan parçası akış alanında hareket ederken ve şekil değiştirirken yüzey alanı sabit kalmaktadır.

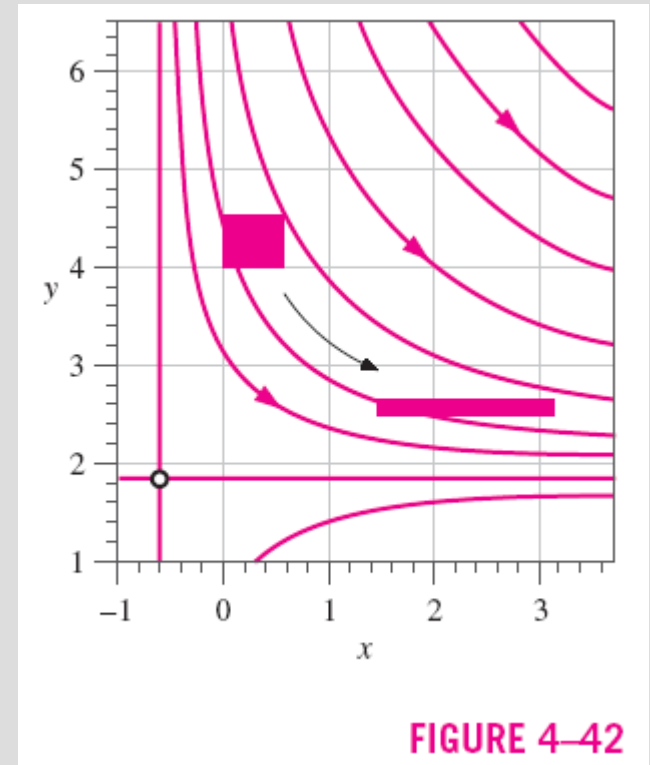


FIGURE 4-42

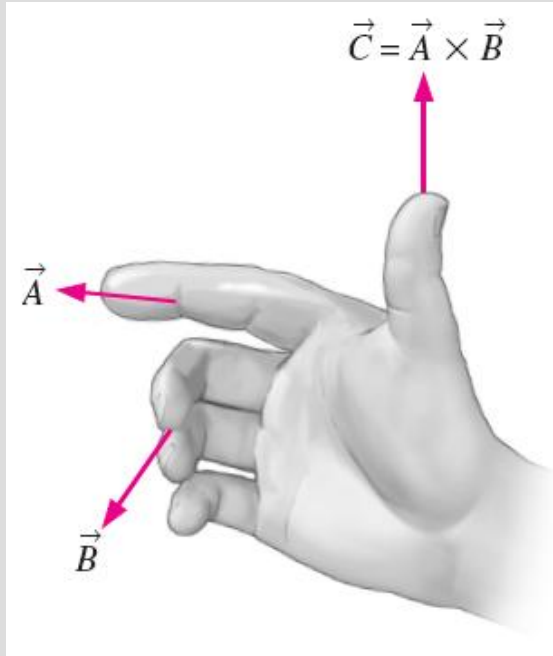
Ömek4-6'daki hız alanına göre 1.5 s'lik zaman periyodu boyunca hareket ettirilmiş olan, başlangıçta kare şeklindeki akışkan parçasının şekil değiştirmesi. Durma noktası $x = -0.625$ $y=1.875$ m'deki daire ile gösterilmiş ve birkaç akım çizgisi çizilmiştir.

4-5 ■ ÇEVİRİNTİ (vorteks) VE ROTASYONELLİK

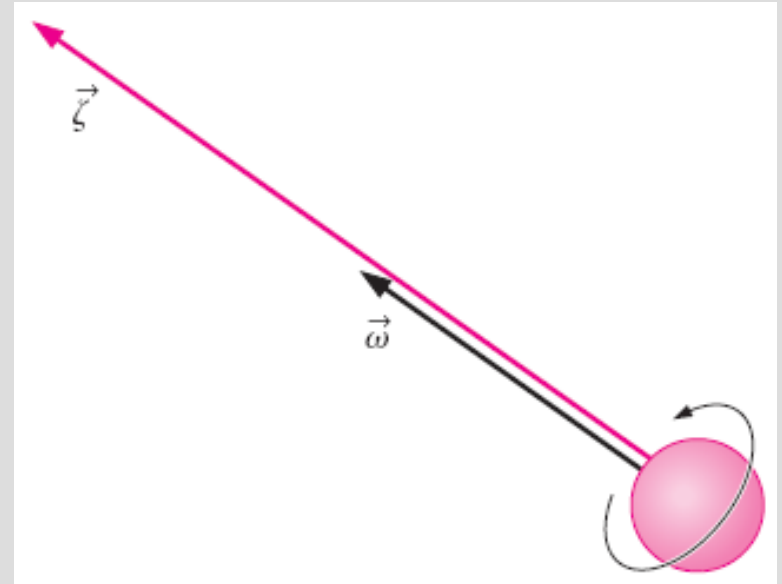
Akışkan akımları analizindeki büyük öneme sahip diğer bir kinematik özellik **çevrinti vektörüdür** ve matematiksel olarak hız vektörü \vec{V} 'nin Curl 'ü şeklinde tanımlanır.

Rate of rotation vector:
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \text{curl}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2}$$

Çevrinti, bir akışkan parçacığının açısal hızının iki katına eşittir.



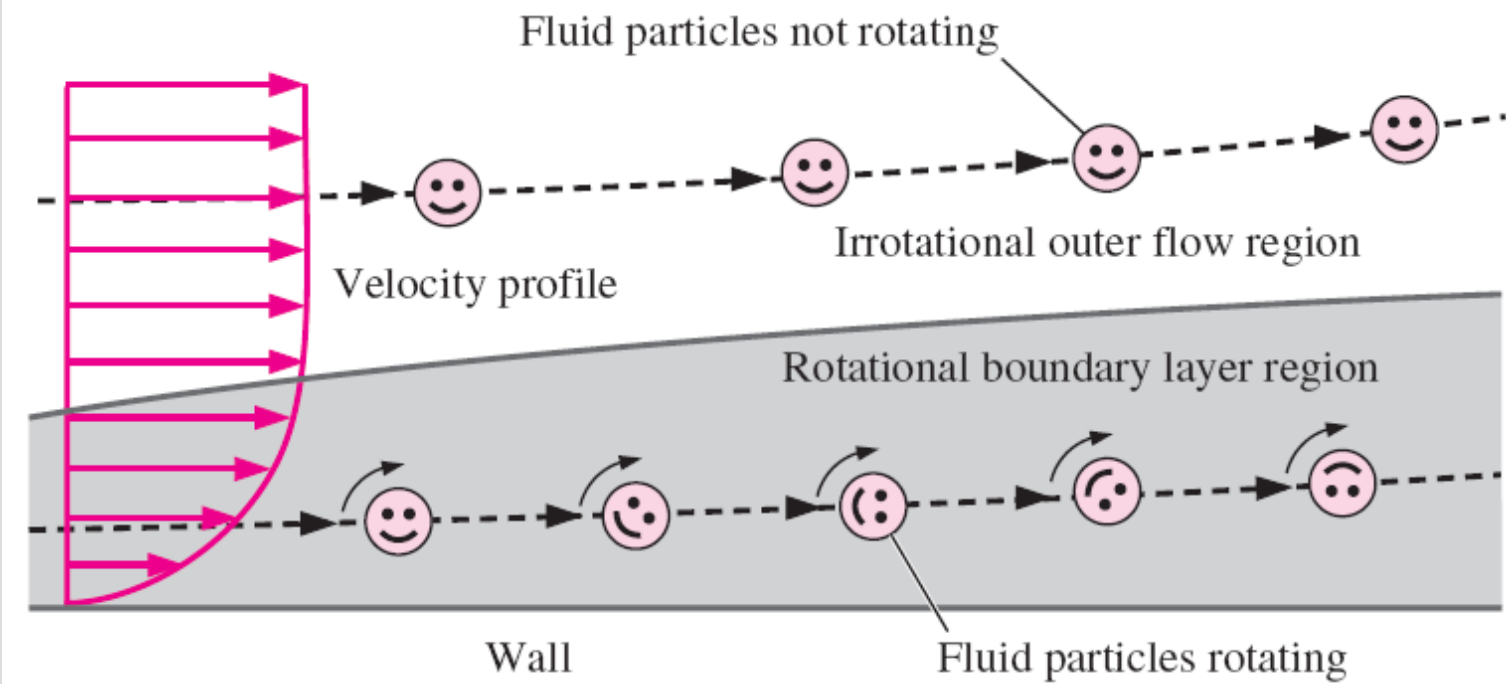
Vektörel bir çarpımın yönü sağ-el kuralı ile belirlenir.



Çevrinti, bir akışkan parçacığının açısal hızının iki katına eşittir.

- Akış alanındaki bir noktada çevrinti sıfır değilse, uzayda o noktayı işgal eden akışkan parçacığı dönmektedir ve bu bölgedeki akış **rotasyonel** olarak adlandırılır.
- Aynı şekilde, akış alanının bölgesinde çevrinti sıfır ise (veya yok denecek kadar küçük ise), bu bölgedeki akışkan parçacıkları dönmeyiz ve akış **irrotasyonel** olarak adlandırılır.
- Fiziksel olarak, dönümlü bir akış bölgesindeki akışkan parçacıkları, bu akış bölgesi boyunca devamlı dönerek hareket eder.

Rotasyonel (dönümlü) ve irrotasyonel (dönümsüz) akış arasındaki fark; dönümlü bir akış bölgesindeki akışkan elemanları döner, dönümsüz bir akış bölgesindeki akışkan parçacıkları ise dönmeyiz.

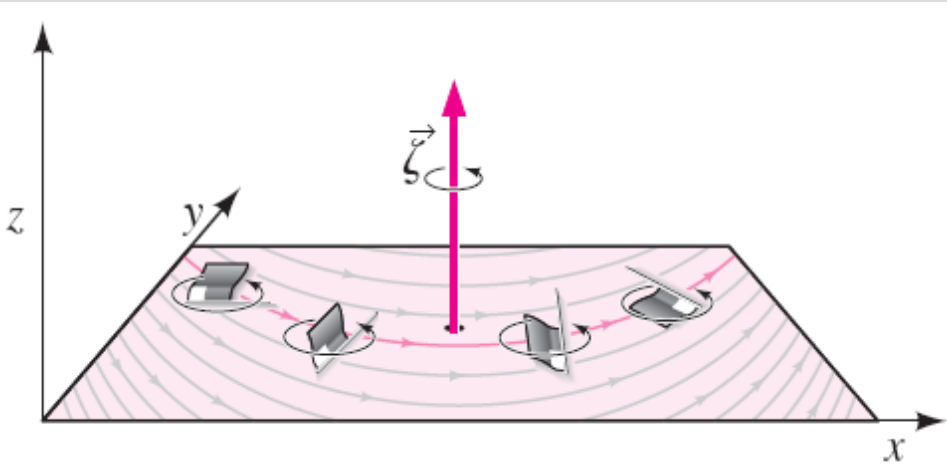


Vorticity vector in Cartesian coordinates:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Two-dimensional flow in Cartesian coordinates:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$



Type equation here. xy -düzlemindeki iki-boyutlu akış için çevrinti vektörü daima z -(yada $-z$)-yönündedir. Bu resimde, bayrak şekilli akışkan parçacıkları xy -düzleminde hareket ederken saatin tersi yönünde dönmektedir; çevrinti ise gösterildiği gibi pozitif z -yönündedir.

Örnek 4-7: İki-Boyutlu Bir Akışta Çevrinti Konturları

Şekil 4-47 gösterilen dikdörtgen kesitli bir bloğa çarpan iki-boyutlu serbest I akım akışının CFD hesaplamasını göz önüne alınız; çevrinti vektörlerinin çiziniz ve sonucu irdeleyiniz.

ÇÖZÜM: CFD ile oluşturularak verilen bir hız alanı için çevrinti alanını hesaplayacağız ve ardından çevrintinin kontur çizimini oluşturacağız.

Analiz: Akış iki-boyutlu olduğundan, çevrintinin sıfırdan farklı tek bileşeni Şekil 4.47’de sayfa düzlemine dik olan z-yönündedir.

Bloğun sol-üst köşesindeki koyu bölge yüksek negatif değerli çevrintiyi işaret etmektedir. Yani bu bölgedeki akışkan parçacıkları saat yönünde dönmektedir. Bu durum, akışın bu kısmında karşılaşılan yüksek hız gradyenlerinden kaynaklanmaktadır. Bu kısımda sınır tabaka, cismin köşesinde çeperden ayrılmakta ve ince bir kayma tabakası oluşturmaktadır. Bu tabakanın enlemesine yönde hız çok ani değişir. Kayma tabakasındaki çevrinti yoğunluğu, çevrinti aşağı akıma doğru yayıldıkça azalmaktadır. Bloğun sağ-üst köşesi dolaylarındaki hafiften gölgelendirilmiş küçük bölge *pozitif çevrinti*(saatin tersi yönünde dönmeyi) göstermektedir-akış ayrılmasından dolayı oluşan ikincil bir akış deseni.

İrdeleme Hızın türevlerinin yüksek olduğu bölgelerde çevrintinin büyüklüğünün en yüksek olacağını beklenir (Denklem 4-30'a bakınız). Yakından incelenirse, Şekil 4-46'daki koyu bölgenin gerçekten de Şekil 4-32'deki yüksek hız gradyenlerine karşılık geldiği görülür. Şekil 4-47'deki çevrinti alanının zaman-ortalama olduğu unutulmamalıdır. Gerçekte anlık akış alanı türbülanslıdır ve daimi değildir. çevrintiler ise küt gövdeden dökülmektedir.

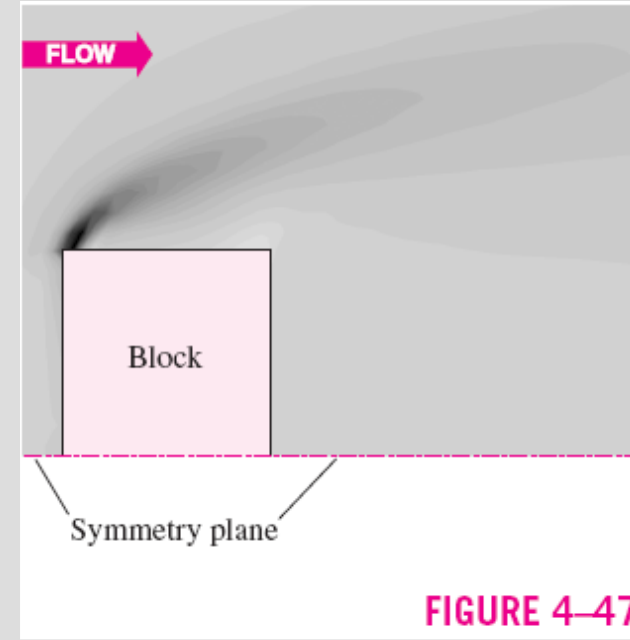


FIGURE 4-47

Bir bloğa çarpan akış nedeniyle oluşan ve CFD hesaplamalarından elde edilen çevrinti alanı k'in kontur çizimi. Simetriden ötürü sadece üst yarı gösterilmiştir. Koyu bölgeler yüksek negatif çevrintiyi; açık bölgeler ise yüksek pozitif çevrintiyi göstermektedir.

Örnek 4-8: İki-Boyutlu Akışta Rotasyonelliğin (Dönümlülüğün) Belirlenmesi

Aşağıda verilen daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu hız alanını dikkate alınız:

$$\vec{V} = (u, v) = x^2\vec{i} + (-2xy - 1)\vec{j} \quad (1)$$

Bu akış dönümlü mü yoksa dönümsüz müdür? Birinci dördülde birkaç akım çizgisi çizin ve bunları irdeleyiniz.

ÇÖZÜM: Verilen hız alanına sahip akışın rotasyonel (dönümlü) mü yoksa dönümsüz mü olduğunu belirleyeceğiz ve birinci dördülde birkaç akım çizgisi çizeceğiz. Akış iki-boyutlu olduğundan Denklem 4-31 geçerlidir. Buradan,

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = (-2y - 0)\vec{k} = -2y\vec{k} \quad (2)$$

elde edilir. çevrinti sıfırdan farklı olduğundan bu akış rotasyoneldir.

Şekil 4-48'de birinci dördülde akışa ait birkaç akım çizgisi çizilmiştir. Buradan, akışkanın aşağı ve sağa doğru hareket ettiği anlaşılmaktadır.

Akışkan parçasının ötelenmesi ve şekil değiştirmesi de aynı şekil üzerinde gösterilmiştir. $\Delta t=0$ 'da akışkan parçası kare şeklindedir, $\Delta t= 0.25$ s'de hareket etmiş ve şekil değiştirmiştir ve $\Delta t = 0.50$ s'de ise daha da ileri hareket etmiş ve daha fazla şekil değiştirmiştir. Özellikle, akışkan parçasının en sağ kısmı, en sol kısmına nazaran sağa doğru ve aşağı doğru daha hızlı hareket etmekte ve akışkan parçasının x-yönünde uzamasına ve düşey doğrultuda ezilmesine neden olmaktadır. Bunun yanında, açıkça görülüyor ki, akışkan parçası saat yönünde net bir dönme yapmaktadır ve bu da Denklem 2'nin sonucu ile uyum göstermektedir.

İrdeleme :Denklem 4-29'dan biliyoruz ki, her bir akışkan parçacığı çevrinti vektörünün yarısına eşit olan bir açısız hızda $\vec{\omega} = -y\vec{k}$ dönmektedir. $\vec{\omega}$ sabit olmadığından bu akış bir rijit-cisim dönmesi değildir. Daha doğrusu $\vec{\omega}$ y ile doğrusal olarak-değişmektedir. Daha detaylı bir analiz ile bu akış alanının sıkıştırılamaz olduğu gösterilebilir.

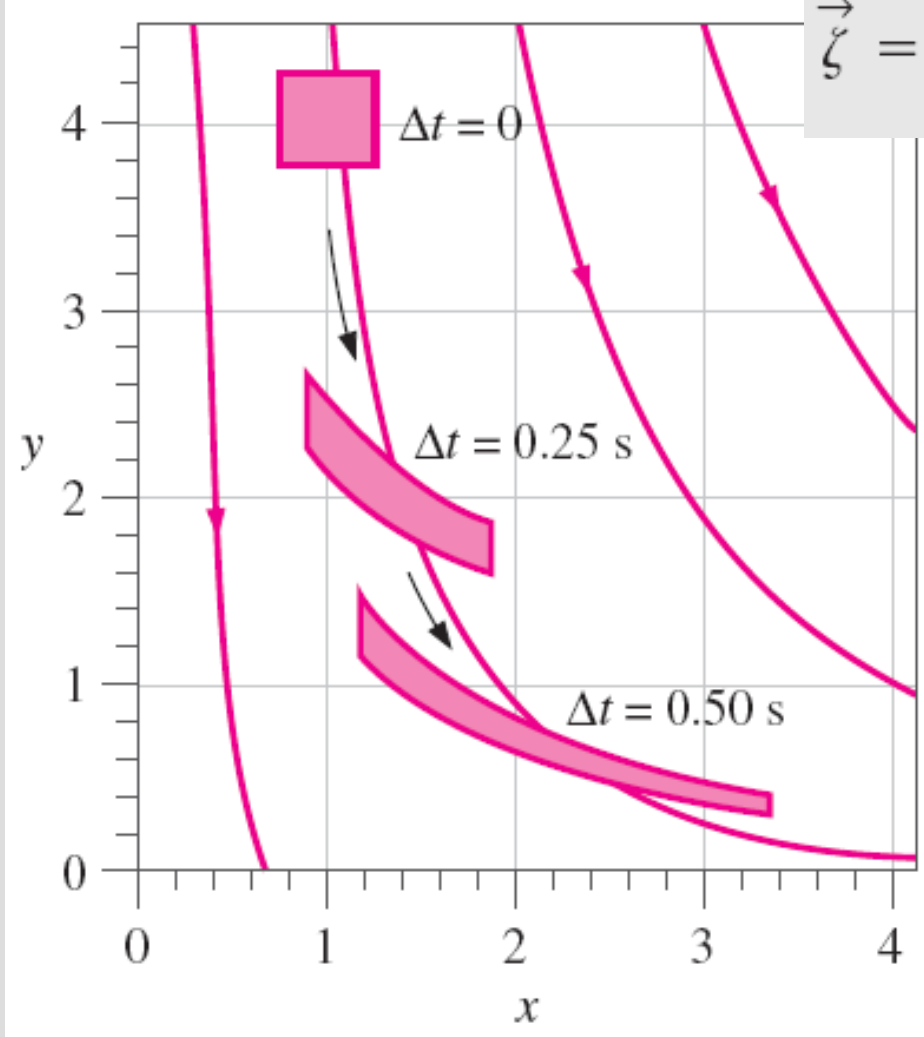
İki boyutlu akışta rotasyonelliğin belirlenmesi

Daimi sıkıştırılmaz iki boyutlu hız alanı

$$\vec{V} = (u, v) = x^2\vec{i} + (-2xy - 1)\vec{j}$$

çevrinti:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = (-2y - 0) \vec{k} = -2y \vec{k}$$



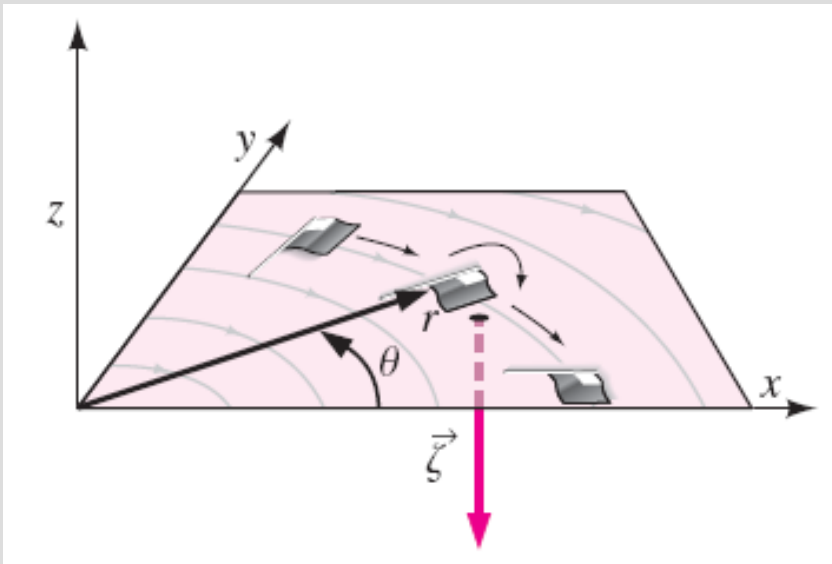
Örnek 4-8'deki hız alanına göre 0.25 s ve 0.5 s'lik zaman dilimleri boyunca hareket ettirilmiş, başlangıçta kare şeklinde olan akışkan parçasının şekil değiştirmesi. Ayrıca birinci dördüde birkaç akım çizgisi de çizilmiştir. Şekilden, akışın *rotasyonel* (dönümlü) olduğu açıkça görülmektedir.

Vorticity vector in cylindrical coordinates:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Two-dimensional flow in cylindrical coordinates:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \vec{k}$$



$r\theta$ düzlemindeki iki-boyutlu akış için çevrinti vektörü daima z - (yada $-z$)- yönündedir. Bu resimde bayrak şekilli akışkan parçacıkları, düzleminde hareket ederken saat yönünde dönmektedir; çevrinti gösterildiği gibi $-z$ - yönündedir.

İki dairesel akışın karşılaştırması

Flow A—solid-body rotation:

$$u_r = 0 \quad \text{and} \quad u_\theta = \omega r$$

Flow B—line vortex:

$$u_r = 0 \quad \text{and} \quad u_\theta = \frac{K}{r}$$

Flow A—solid-body rotation:

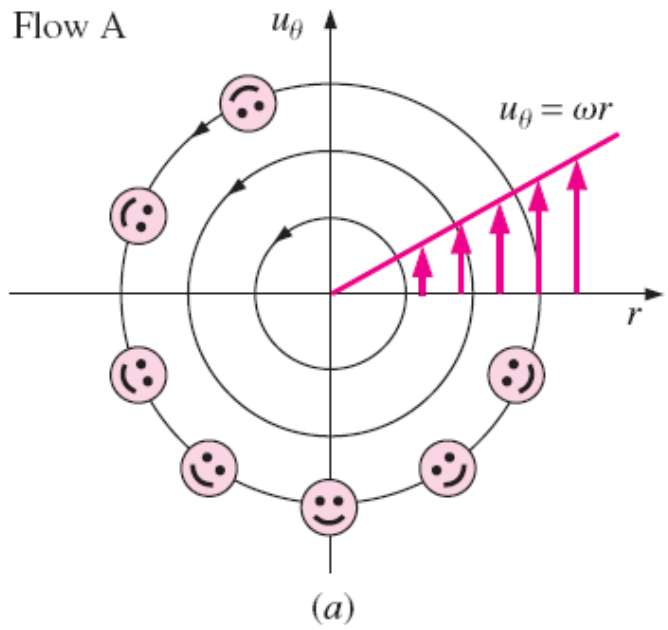
$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0 \right) \vec{k} = 2\omega \vec{k}$$

Flow B—line vortex:

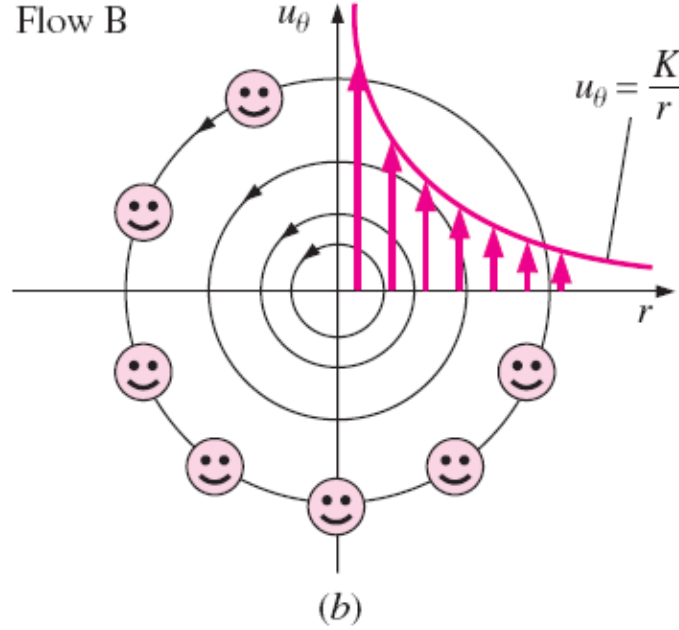
$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0 \right) \vec{k} = 0$$

(a) Katı-cisim dönmesi şeklindeki A akışına ve (b) çizgisel çevri şeklindeki B akışına ait akım çizgileri ve hız profilleri. A akışı dönümlüdür, buna karşın B akışı orijin hariç her yerde dönümsüzdür.

Flow A



Flow B





A akışı ile atlı karınca arasında ve B akışı ile dönme dolap arasında basit bir benzeşim kurulabilir. Çocuklar atlı karınca üzerinde dönerlerken, aynı zamanda atlı karıncayla aynı açısal hızda kendi etraflarında da dönerler. Bu rotasyonel (dönümlü) akış ile benzerdir. Bunun aksine, bir dönme dolap üzerindeki çocuklar ise dairesel yörüngelerini izlerken daima yukarı doğru yönelmiş bir vaziyette kalırlar. Bu da irrotasyonel (dönümsüz) akışa benzerdir.



Basit bir analogi: (a) dönümlü dairesel akış atlı karıncaya benzerken (b) dönümsüz dairesel akış dönme dolaba benzer.

Örnek 4.9: Çizgisel Bir Kuyunun Dönümlülüğünün Belirlenmesi

Çizgisel kuyu denilen basit iki-boyutlu bir hız alanı, z-ekseni boyunca bir çizgi içerisine doğru emilmekte olan akışkanın simülasyonunu yapmak için sıklıkla kullanılır. z-ekseni boyunca birim uzunluk başına hacimsel debi \dot{V}/L , nin bilindiğini varsayınız. Burada \dot{V} negatif bir büyüklüktür. r θ -düzleminde iki boyutta, hacimsel debi

$$u_r = \frac{\dot{V}}{2\pi L} \frac{1}{r} \quad \text{and} \quad u_\theta = 0$$

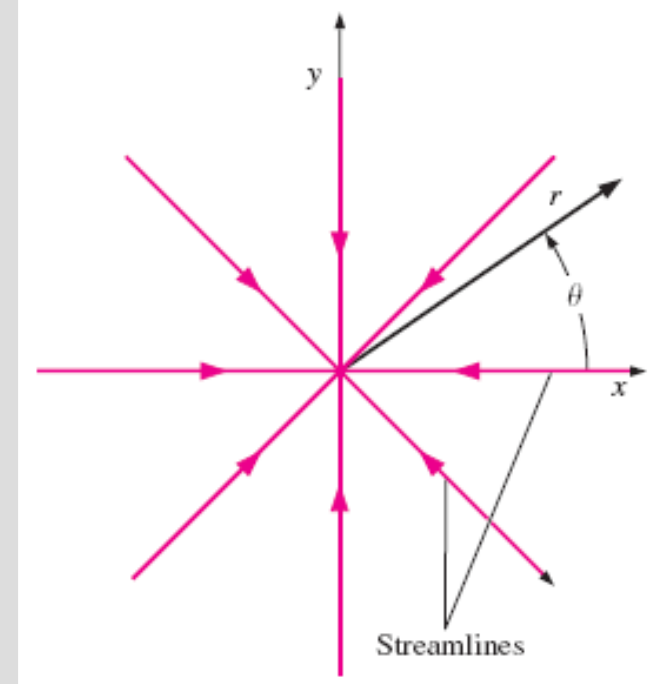
şeklindedir. Akışa ait birkaç akım çizgisi çizin ve çevrintiyi hesaplayınız. Bu akış dönümlü mü yoksa dönümsüz müdür?

ÇÖZÜM; Verilen akış alanının akım çizgileri çizilecek ve akışın dönümlülüğü belirlenecektir.

Analiz: Sadece radyal akış olduğundan ve teğetsel akış olmadığından, tüm akım çizgilerinin orijine doğru yönelmiş ışınlar şeklinde olacağı anlaşılmaktadır. Şekil 4-52'de birkaç i akım çizgisi çizilmiştir. çevrinti ise, Denklem 4-33'ten hesaplanır:'

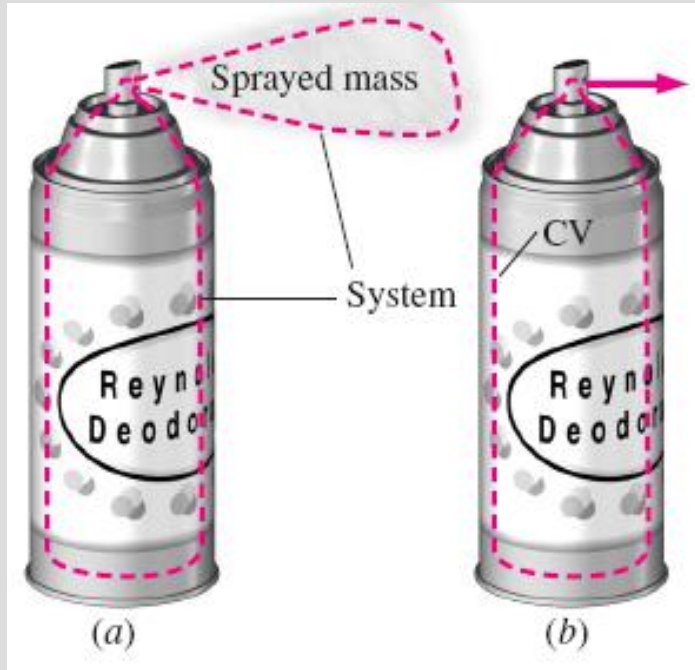
$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} u_r \right) \vec{k} = \frac{1}{r} \left(0 - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\dot{V}}{2\pi L} \frac{1}{r} \right) \right) \vec{k} = 0 \quad (2)$$

çevrinti vektörü her yerde sıfır, olduğundan bu akış alanı dönümsüzdür.



ŞEKİL 4-51
Çizgisel kuyu için r θ -
düzlemindeki akım çizgileri.

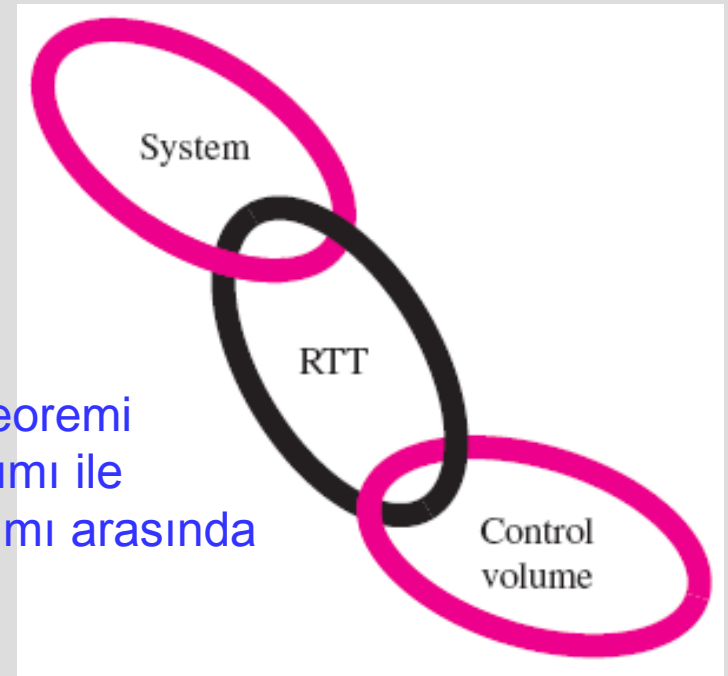
4-6 ■ REYNOLDS TRANSPORT TEOREMİ

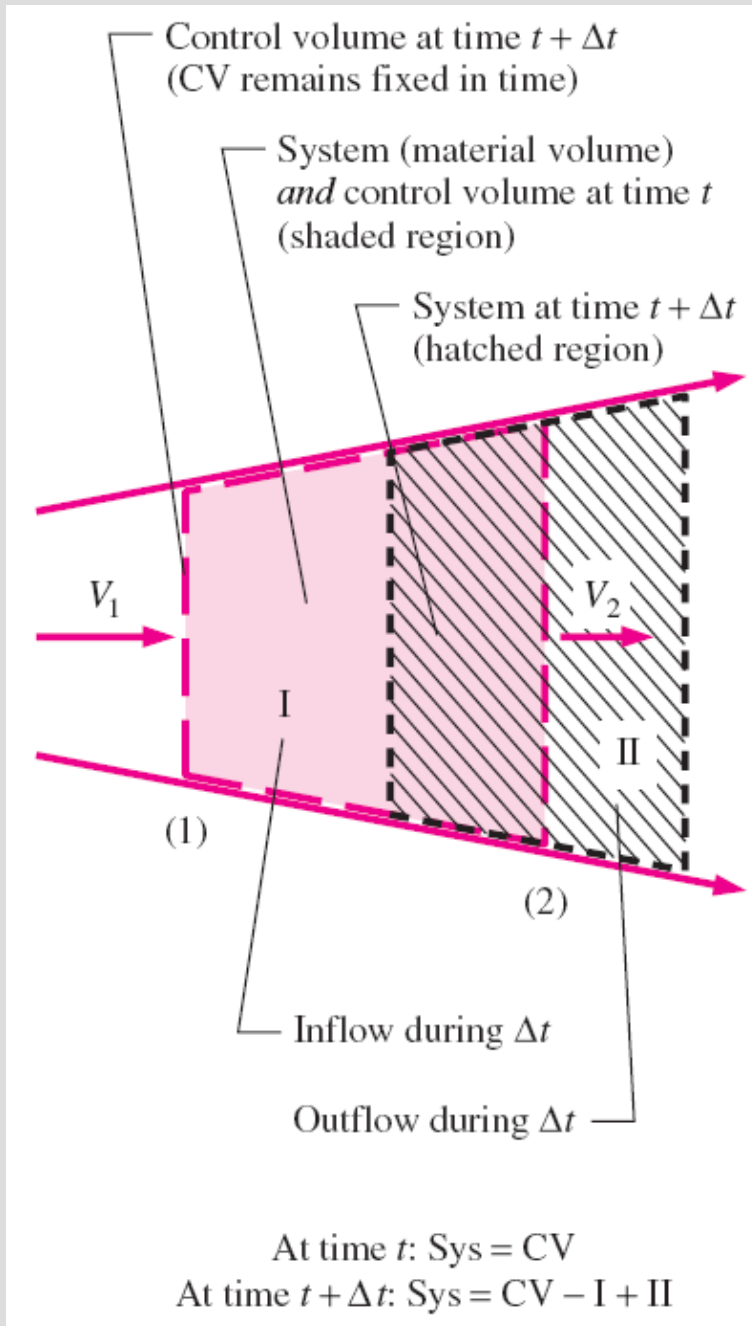


Kutusundan püskürtülen deodorantın analizi için iki metot: (a) Akışkan, hareket ederken ve şekil değiştirirken takip edilir. Bu sistem yaklaşımıdır—sistem sınırında kütle geçişi olmaz ve toplam kütle sabit kalır, (b) Kutunun sabit iç hacmi dikkate alınır. Bu kontrol hacmi yaklaşımıdır—kütle sınırı geçer.

Bir yaygın özelliğin bir sistem için ve bir kontrol hacmi için birim zamandaki değişimleri arasındaki ilişki, **Reynolds transport teoremi (RTT)** ile ifade edilir.

Reynolds transport teoremi (RTT), sistem yaklaşımı ile kontrol hacmi yaklaşımı arasında bir bağ oluşturur.





$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{dB_{\text{CV}}}{dt} - \dot{B}_{\text{in}} + \dot{B}_{\text{out}}$$

Sistemin B özelliğinin değişim hızının; B'nin kontrol hacmi içerisindeki değişim hızı ile B'nin kontrol yüzeyinden dışarı çıkan kütle ile oluşan net alasının toplamına eşit olduğunu ifade eder.

Göz önüne alınan bir anda sistem ve kontrol hacminin aynı uzayı işgal etmesi kaydıyla, bu denklem herhangi bir an için uygulanabilir.

t ve $t + \Delta t$ anlarında bir akış alanının iraksak kısmındaki hareketli sistem (taralı bölge) ve sabit kontrol hacmi (gölgeli bölge). Üst ve alt sınırlar akışa ait akım çizgileridir.

B (kütle, enerji ya da momentum gibi) herhangi bir yaygın özellik olsun ve $b=B/m$ ise buna karşılık gelen yoğun özellik olsun. Yaygın özelliklerin toplanabilir olmasından yola çıkarak t ve $t + \Delta t$ anlarındaki yaygın özellik B aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B_{sys,t} = B_{CV,t} \quad (\text{the system and CV coincide at time } t)$$

$$B_{sys,t+\Delta t} = B_{CV,t+\Delta t} - B_{I,t+\Delta t} + B_{II,t+\Delta t}$$

Birinci eşitliği ikinci eşitlikten çıkarıp Δt ile bölersek,

$$\frac{B_{sys,t+\Delta t} - B_{sys,t}}{\Delta t} = \frac{B_{CV,t+\Delta t} - B_{CV,t}}{\Delta t} - \frac{B_{I,t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{B_{II,t+\Delta t}}{\Delta t}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ için limitini alıp, türevin tanımından faydalanarak,

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{CV}}{dt} - \dot{B}_{in} + \dot{B}_{out} \quad (4-38)$$

or

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{CV}}{dt} - b_1 \rho_1 V_1 A_1 + b_2 \rho_2 V_2 A_2$$

since

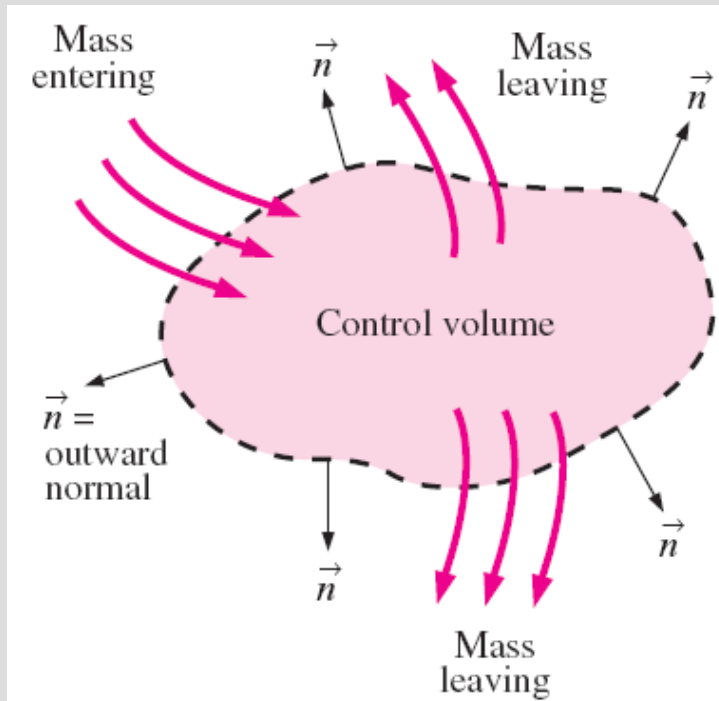
$$B_{I,t+\Delta t} = b_1 m_{I,t+\Delta t} = b_1 \rho_1 V_{I,t+\Delta t} = b_1 \rho_1 V_1 \Delta t A_1$$

$$B_{II,t+\Delta t} = b_2 m_{II,t+\Delta t} = b_2 \rho_2 V_{II,t+\Delta t} = b_2 \rho_2 V_2 \Delta t A_2$$

and

$$\dot{B}_{in} = \dot{B}_I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{I,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_1 \rho_1 V_1 \Delta t A_1}{\Delta t} = b_1 \rho_1 V_1 A_1$$

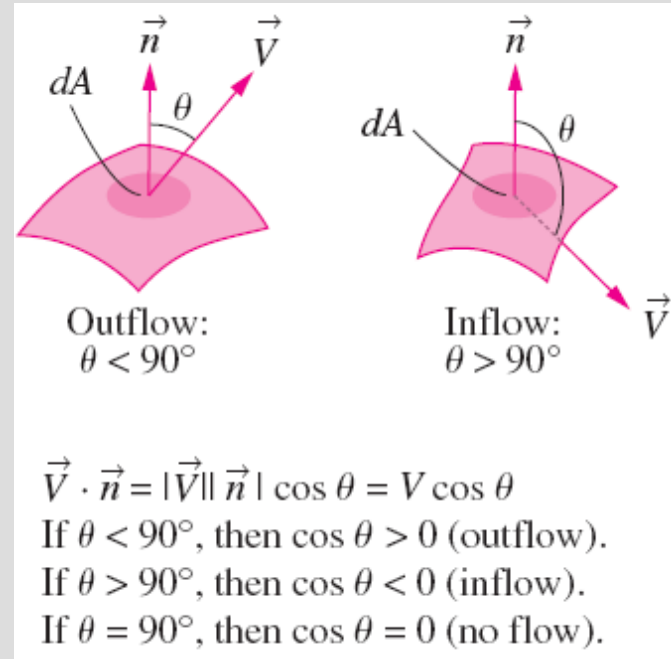
$$\dot{B}_{out} = \dot{B}_{II} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_2 \rho_2 V_2 \Delta t A_2}{\Delta t} = b_2 \rho_2 V_2 A_2$$



$$\dot{B}_{\text{net}} = \dot{B}_{\text{out}} - \dot{B}_{\text{in}} = \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ 'nın kontrol yüzeyi boyunca integrali, B özelliğinin birim zamanda kontrol hacminden dışarı çıkan (negatif olduğunda kontrol hacminin içine giren) net miktarını verir.

$$B_{\text{CV}} = \int_{\text{CV}} \rho b dV$$



Diferansiyel kontrol yüzeyi alanında dışarı ve içeri doğru olan kütle akışı.

RTT, fixed CV:

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} \rho b dV + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

Alternate RTT, fixed CV:

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

Relative velocity:

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{CS}$$

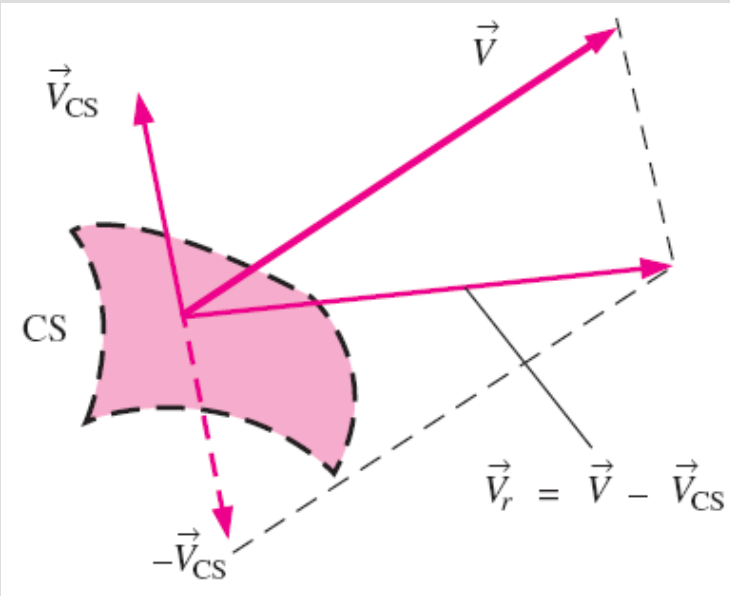
RTT, nonfixed CV:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA$$

RTT, steady flow:

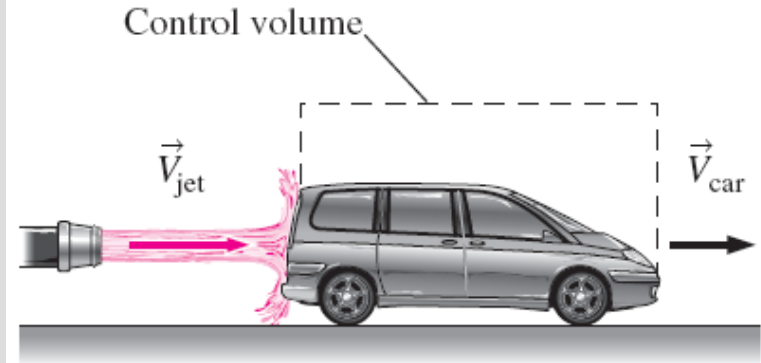
$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA$$

Reynolds transport teoreminin, sabit hızla hareket eden bir kontrol hacmine uygulanması.

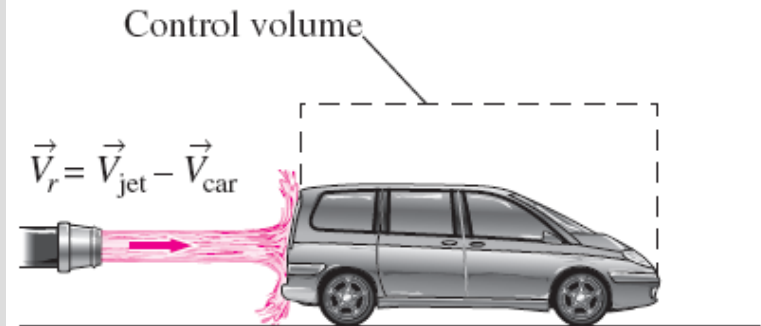


Kontrol yüzeyinden geçen akışkanın bağıl hızı, akışkanın mutlak hızı ile yerel kontrol yüzeyi hızının negatifinin vektörel toplamı ile bulunur.

Absolute reference frame:



Relative reference frame:



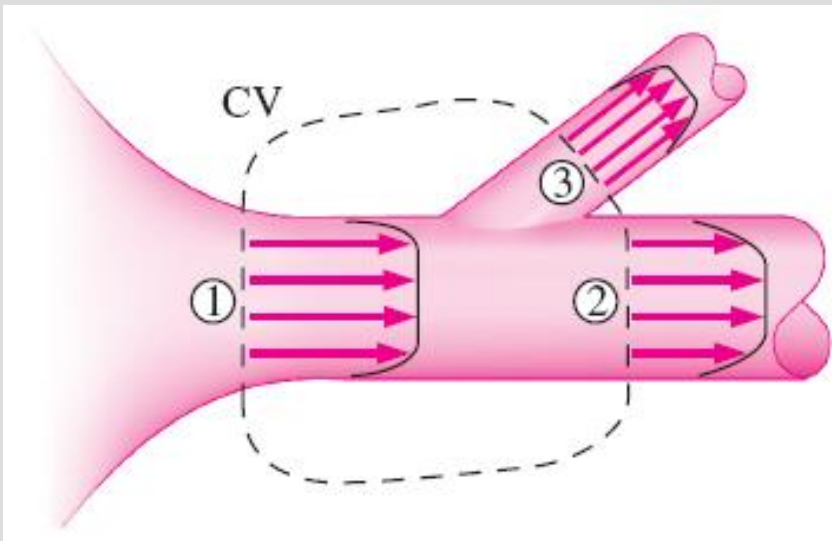
$$\int_A \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \cong b_{\text{avg}} \int_A \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = b_{\text{avg}} \dot{m}_r$$

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} \rho b dV + \underbrace{\sum_{\text{out}} \dot{m}_r b_{\text{avg}}}_{\text{for each outlet}} - \underbrace{\sum_{\text{in}} \dot{m}_r b_{\text{avg}}}_{\text{for each inlet}}$$

Approximate RTT for well-defined inlets and outlets:

$$\dot{m}_r \approx \rho_{\text{avg}} \dot{V}_r = \rho_{\text{avg}} V_{r, \text{avg}} A$$

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} \rho b dV + \underbrace{\sum_{\text{out}} \rho_{\text{avg}} b_{\text{avg}} V_{r, \text{avg}} A}_{\text{for each outlet}} - \underbrace{\sum_{\text{in}} \rho_{\text{avg}} b_{\text{avg}} V_{r, \text{avg}} A}_{\text{for each inlet}}$$



İyi-tanımlanmış bir giriş (1) ve iyi-tanımlanmış iki çıkışın (2 ve 3) bulunduğu kontrol hacmine bir örnek. Böyle durumlarda, RTT'deki kontrol yüzeyi integralleri her bir giriş ve çıkıştan geçen akışkan özelliklerinin ortalaması cinsinden daha uygun bir biçimde yazılabilir.

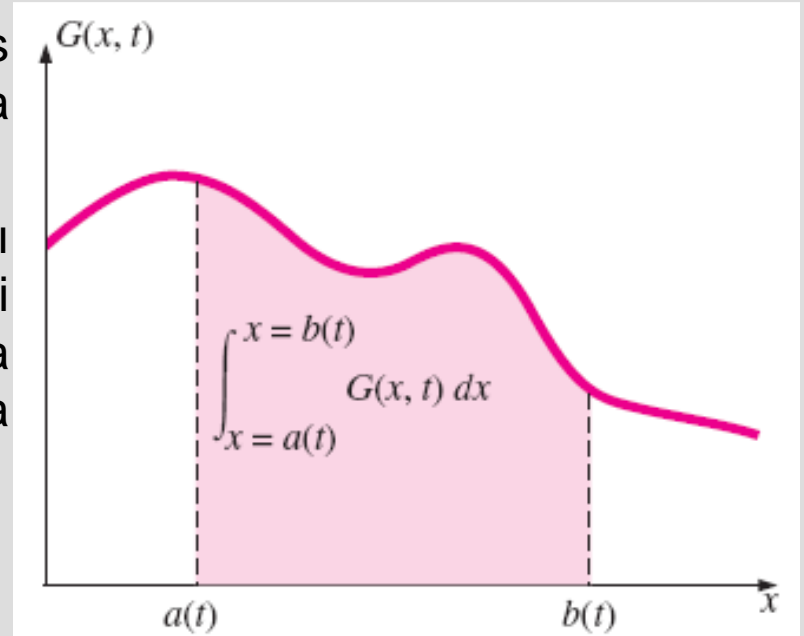
Reynolds Transport Teoreminin alternatif türetimi

One-dimensional Leibniz theorem:

$$\frac{d}{dt} \int_{x=a(t)}^{x=b(t)} G(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} G(b, t) - \frac{da}{dt} G(a, t)$$

Leibnitz teoremini kullanarak Reynolds transport teoremini daha zarif bir yolla türetmek mümkündür.

Leibnitz teoremi, sadece integral sınırları $a(t)$ ve $b(t)$ 'nin zamana göre değişimlerini hesaba katmakla kalmaz, aynı zamanda integrali alınan $G(x, t)$ ifadesinin zamanla daimi olmayan değişimlerini de dikkate alır.



ŞEKİL 4-60

Bir-boyutlu Leibnitz teoremi, integral sınırları zamanın fonksiyonu olan bir integralin zamana göre türevini hesaplamada gereklidir (integral işlemi x'e göre).

Örnek 4.10: Bir-Boyutlu Leibnitz İntegrali

Aşağıdaki ifadeyi mümkün olduğunca sadeleştiriniz:

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{x=0}^{x=Ct} e^{-x^2} dx \quad (1)$$

ÇÖZÜM: Verilen ifadeden $F(t)$ en sade şekliyle elde edilecektir

Analiz: Çözüm için önce integrali sonra da türevi almaya çalışabiliriz. Ancak verilen Denklem 1, Denklem 4-49 biçiminde olduğundan bir-boyutlu Leibnitz teoremini kullanabiliriz. Burada $G(x,t)=e^{-x^2}$ olarak verilmiştir (Bu basit örnekte G zamanın bir fonksiyonu değildir). İntegralin sınırları ise $a(t)=0$ ve $b(t)=Ct$ 'dir. Teoremin uygulanmasıyla sonuç aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(t) = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_0 dx + \underbrace{\frac{db}{dt}}_C \underbrace{G(b,t)}_{e^{-b^2}} - \underbrace{\frac{da}{dt}}_0 G(a,t) \rightarrow F(t) = Ce^{-C^2t^2} \quad (2)$$

Üç boyutta, bir *hacim integrali için Leibnitz teoremi,*

Üç boyutlu Leibnitz Teoremi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, y, z, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{A(t)} G \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA \quad (4-50)$$

Burada hareket eden ve/veya şekil değiştiren bir hacmi (zamana bağlı), $A(t)$ bu hacmin yüzeyini (sınır) ve V , bu (hareketli) yüzeyin mutlak hızını (Şekil 4-61) ifade etmektedir. Denklem 4-50, uzayda ve zamanda gelişigüzel hareket eden ve/veya şekli değişen herhangi bir hacme uygulanabilir. Önceki analizle uyum sağlamak açısından integrali alınacak G fonksiyonunu, akış uygulaması için ρb olarak almak suretiyle, Akışa uygulanan üç-boyutlu Leibnitz teoremi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{A(t)} \rho b \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA \quad (4-51)$$

elde edilir. Eğer Leibnitz teoremini, bir maddesel hacmin (akışla hareket eden müetan sabit bir sistem) söz konusu olduğu özel bir duruma uygulayacak olursak, bu durumda maddesel yüzey üzerinde her noktada $\vec{V}_A = \vec{V}$ olur, zira maddesel hacim akışkan ile beraber hareket etmektedir. Bu halde V , yerel akış hızı olur. Maddesel bir hacme uygulanan Leibnitz teoremi:

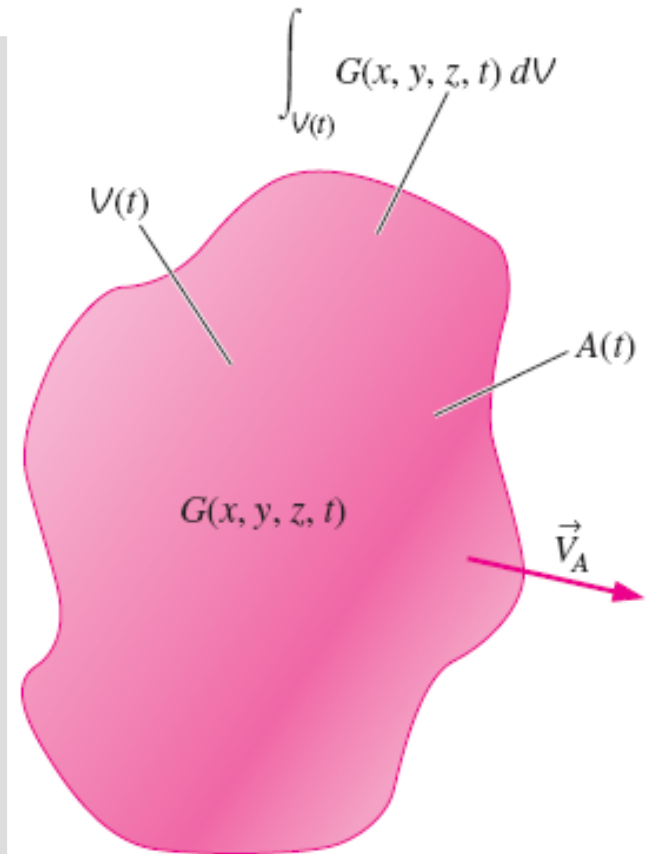
Three-dimensional Leibniz theorem:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, y, z, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{A(t)} G \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA$$

Three-dimensional Leibniz theorem applied to fluid flow:

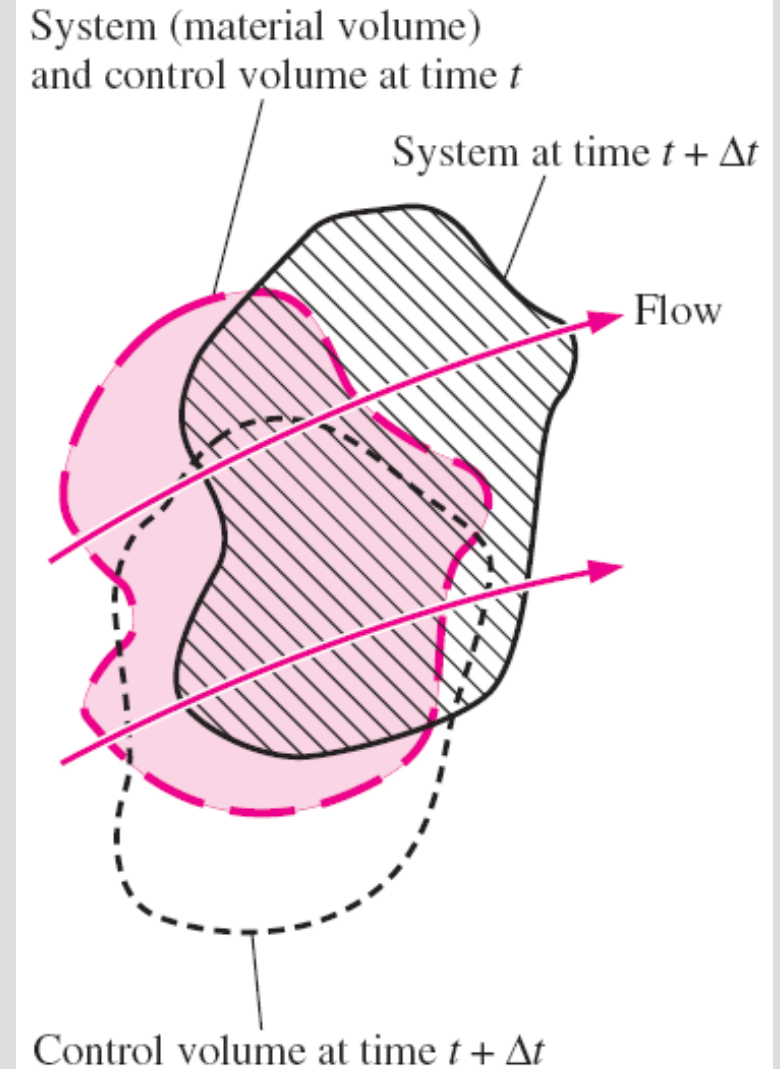
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{A(t)} \rho b \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA$$

Üç-boyutlu Leibnitz teoremi, hacmin kendisinin zamanla hareket ettiği ve/veya şekil değiştirdiği durumda bir hacim integralinin zamana göre türevini hesaplamada gereklidir. Buna göre Leibnitz teoreminin üç-boyutlu biçimi, Reynolds transport teoremini alternatif bir yolla türetmek için kullanılabilir.



General RTT, nonfixed CV:
$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

Maddesel hacim (sistem) ve kontrol hacmi t anında aynı uzayı işgal etmekte (kırmızı gölgeli alan), ancak farklı biçimde hareket edip şekil değiştirmektedir. Bir süre geçtikten sonra bunlar üst üste çakışmaz.



EXAMPLE 4-11 Reynolds Transport Theorem in Terms of Relative Velocity

Beginning with the Leibniz theorem and the general Reynolds transport theorem for an arbitrarily moving and deforming control volume, Eq. 4-53, prove that Eq. 4-44 is valid.

SOLUTION Equation 4-44 is to be proven.

Analysis The general three-dimensional version of the Leibniz theorem, Eq. 4-50, applies to *any* volume. We choose to apply it to the control volume of interest, which can be moving and/or deforming differently than the material volume (Fig. 4-63). Setting G to ρb , Eq. 4-50 becomes

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} \rho b \, dV = \int_{\text{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) \, dV + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V}_{\text{CS}} \cdot \vec{n} \, dA \quad (1)$$

We solve Eq. 4-53 for the control volume integral,

$$\int_{\text{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) \, dV = \frac{dB_{\text{sys}}}{dt} - \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad (2)$$

Substituting Eq. 2 into Eq. 1, we get

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} \rho b \, dV = \frac{dB_{\text{sys}}}{dt} - \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V}_{\text{CS}} \cdot \vec{n} \, dA \quad (3)$$

Combining the last two terms and rearranging,

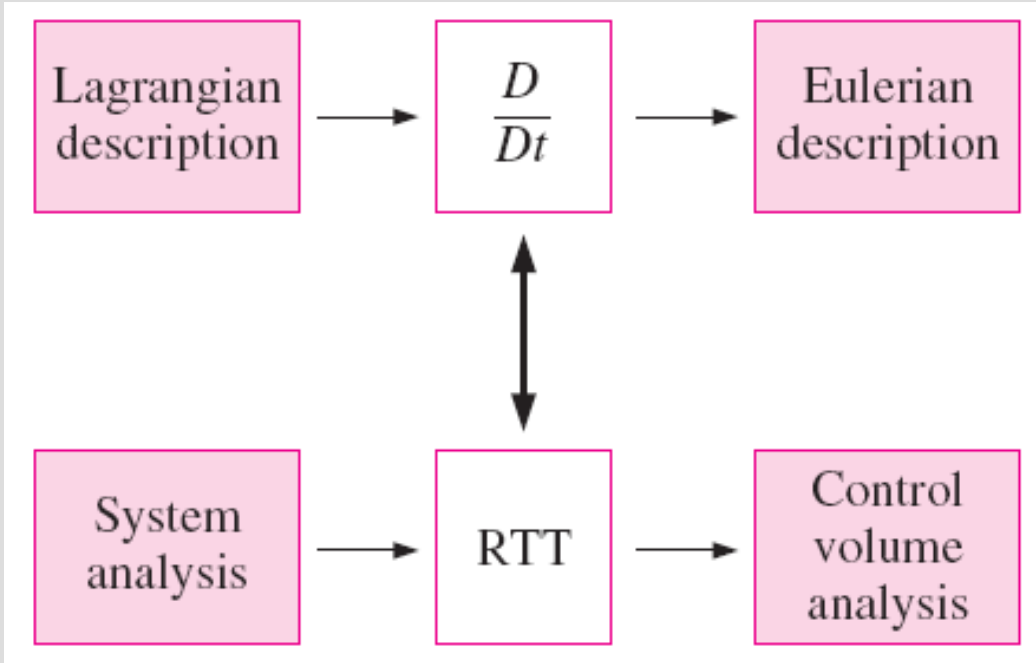
$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} \rho b \, dV + \int_{\text{CS}} \rho b (\vec{V} - \vec{V}_{\text{CS}}) \cdot \vec{n} \, dA \quad (4)$$

But recall that the relative velocity is defined by Eq. 4-43. Thus,

$$\text{RTT in terms of relative velocity: } \frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} \rho b \, dV + \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA \quad (5)$$

Discussion Equation 5 is indeed identical to Eq. 4-44, and the power and elegance of the Leibniz theorem are demonstrated.

Maddesel Türev ve RTT arasındaki ilişki



Sonlu büyüklükteki kontrol hacimleri için olan Reynolds transport teoremi (integral analizi), sonsuz küçük büyüklükteki hacimler için olan maddesel türeve benzerdir. Her iki durumda da Lagrange ya da sistem bakış açısını; Euler ya da kontrol hacmi bakış açısına dönüştürürüz.

Reynolds transport teoremi sonlu büyüklükteki kontrol hacmini, maddesel türev ise sonsuz küçük akışkan parçacıklarını ele almasına karşın, aynı temel fiziksel yorum her ikisi için de geçerlidir

Maddesel türevin herhangi bir akışkan özelliğine, bir skalere veya bir vektöre uygulanabilmesi gibi, Reynolds transport teoremi de herhangi bir skaler veya vektörel özelliğe uygulanabilir.

Özet

- Lagrange ve Euler Tanımları
 - ✓ İvme alanı
 - ✓ Maddesel Türev
- Akım Şekilleri ve Akım Görselleştirmesi
 - ✓ Akım çizgileri ve akım tüpleri, Yörünge çizgileri,
 - ✓ Çıkış çizgileri, Zaman çizgileri
 - ✓ Refraktif Akış Görselleştirme Teknikleri
 - ✓ Yüzey Akış Görselleştirme Teknikleri
- Akışkan akım verisinin çizimi
 - ✓ Vektör çizimleri, Kontur çizimleri
- Diğer Kinematik Tanımlar
 - ✓ Akış elemanlarının hareket tipleri veya deformasyonu
- Girdap (çevrinti) ve Rotasyonellik
 - ✓ İki dairesel akışın karşılaştırması
- Reynolds Transport Teoremi
 - ✓ Reynolds Transport Teoreminin (RTT) alternatif türetimi
 - ✓ Maddesel türev ve RTT arasındaki ilişki