Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları, 2nd Edition
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala
McGraw-Hill, 2010

BÖLÜM 6

AKIŞ SİSTEMLERİNİN MOMENTUM ANALİZİ

Amaçlar

- Kontrol hacmine etkiyen çeşitli kuvvetleri ve momentumları tespit etme
- Akışla ilgili kuvvetleri belirlemede kontrol hacmi analizini kullanma
- Akışla ilgili ortaya çıkan ve iletilen torku belirlemede kontrol hacmi analizini kullanma

6–1 ■ NEWTON ’UN YASALARI

Newton’un yasaları: Cisimlerin hareketleri ile bunlara etkiyen kuvvetler arasındaki bağıntılardır.

Newton’un ilk yasası: Durmakta olan bir cismin hareketsiz kalacağını, hareket halindeki bir cisim üzerine etkiyen net bir kuvvet yoksa onun düz bir yörünge üzerinde aynı hızla hareketine devam edeceğini ifade eder.

Dolayısıyla bir cisim eylemsizlik durumunu sürdürmek eğilimindedir.

Newton’un ikinci yasası: Bir cismin ivmesinin, cisme etkiyen net kuvvet ile doğru orantılı ve cismin kütlesi ile ters orantılı olduğunu belirtir.

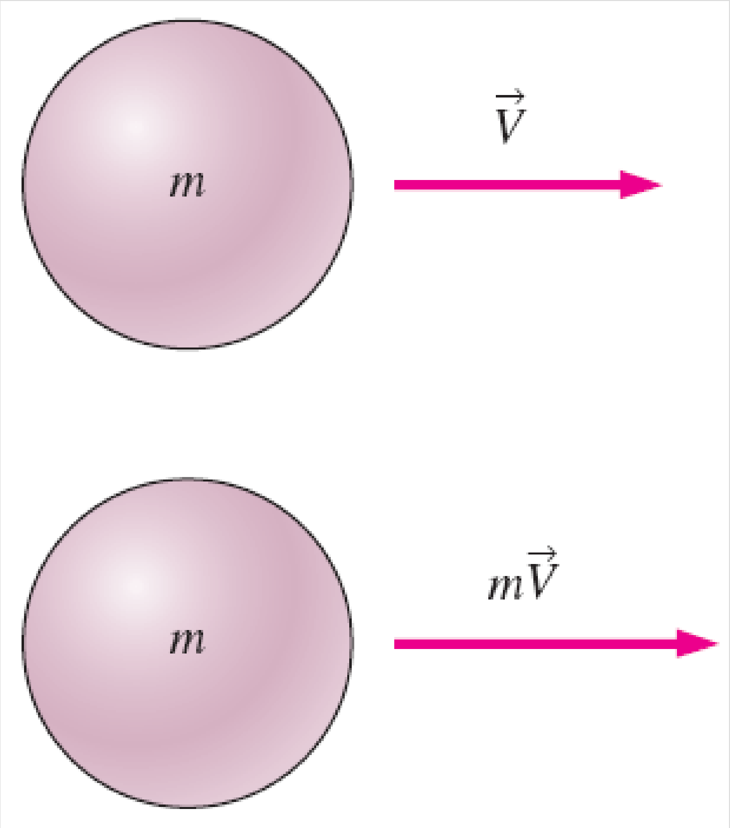
Newton’un üçüncü yasası: Bir cisim ikinci bir cisme kuvvet uyguladığında, ikinci cismin de birinci cisme eşit ve ters yönde bir kuvvet uygulayacağını ifade eder.

Bu nedenle, oluşan tepki kuvvetinin yönü sistem olarak seçilen cisme bağlıdır.

$$\textit{Newton's second law:} \qquad \vec{F} = m\vec{a} = m\,\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

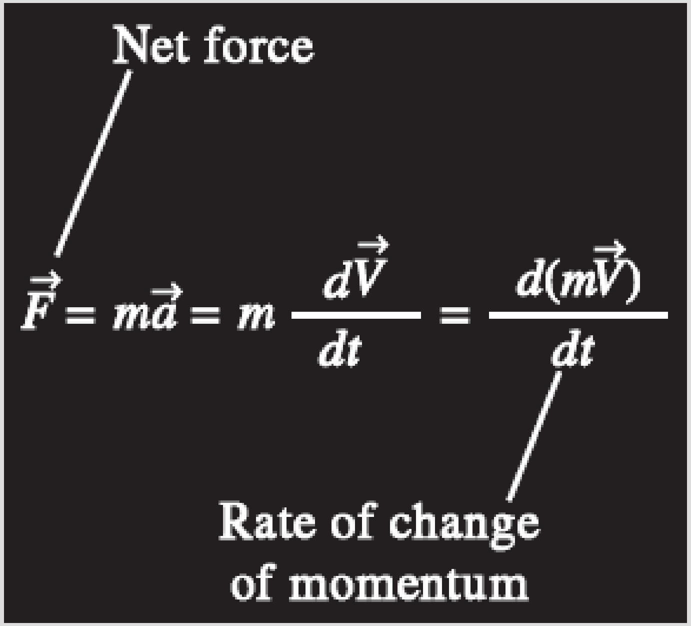
Doğrusal momentum veya sadece cismin momentumu: Cismin kütlesi ile hızının çarpımına eşittir.

Newton'un ikinci yasası, akışkanlar mekaniğinde genellikle *doğrusal momentum denklemi olarak bilinir.*



Doğrusal momentum, kütle ile hızın çarpımıdır ve yönü hızın yönüyle aynıdır.

Momentumun korunumu prensibi: Bir sisteme etkiyen net bir kuvvet bulunmuyorsa, sistemin momentumu da sabit kalır.



Newton'un ikinci yasası; bir cismin momentumunun değişim hızı, o cisme etkiyen net kuvvete eşittir şeklinde de ifade edilebilir.

The counterpart of Newton's second law for rotating rigid bodies is expressed as $\vec{M} = I\vec{\alpha}$, where $\vec{M}$ is the net moment or torque applied on the body, I is the moment of inertia of the body about the axis of rotation, and $\vec{\alpha}$ is the angular acceleration. It can also be expressed in terms of the rate of change of angular momentum $d\vec{H}/dt$ as

Angular momentum equation: $$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt} \qquad \text{(6–2)}$$

Angular momentum about x-axis: $$M_x = I_x\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{dH_x}{dt}$$

Açısal momentumun korunumu prensibi: Dönmekte olan bir cisme etkiyen net tork sıfır ise, bu cismin toplam açısal momentumu sabit kalır ve dolayısıyla böyle bir sistemin açısal momentumu korunmuş olur.

Net torque

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

Rate of change of angular momentum

Bir cismin açısal momentumunun değişim hızı, o cisme etkiyen net momente eşittir.

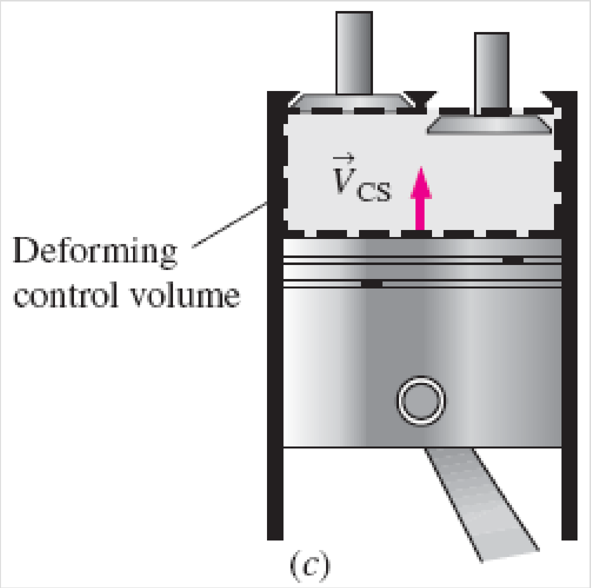
6–2 ■ KONTROL HACMİ SEÇİMİ

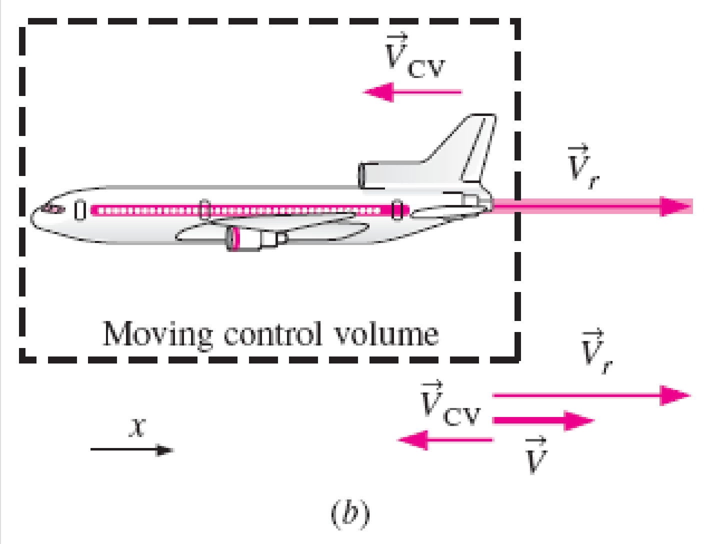
Bir kontrol hacmi, uzayda akışkanın içerisinden aldığı, *rastgele seçilmiş bir bölgedir* ve bu bölgenin sınırlarını oluşturan kontrol yüzeyi sabit, hareketli ve hatta akış sırasında şekil değiştiren bir yüzey olabilir.

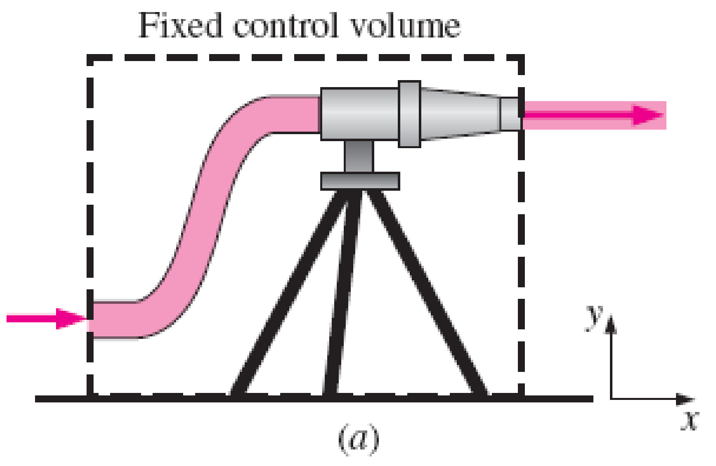
Birçok akış sisteminde sabit donanım durağan bir yüzeye sıkıca bağlanmış haldedir. Bu tür sistemler en iyi, ***sabit kontrol hacimler*** *kullanılarak analiz edilir.*

Hareketli ya da şekil değiştiren akış sistemleri analiz edilirken, kontrol hacminin de ***hareket etmesine*** *veya* ***şekil değiştirmesine*** *izin verilmesi genellikle daha uygundur.*

Şekil değiştiren kontrol hacminde, kontrol yüzeyinin bir kısmı diğer kısımlarına göre bağıl hareket eder.







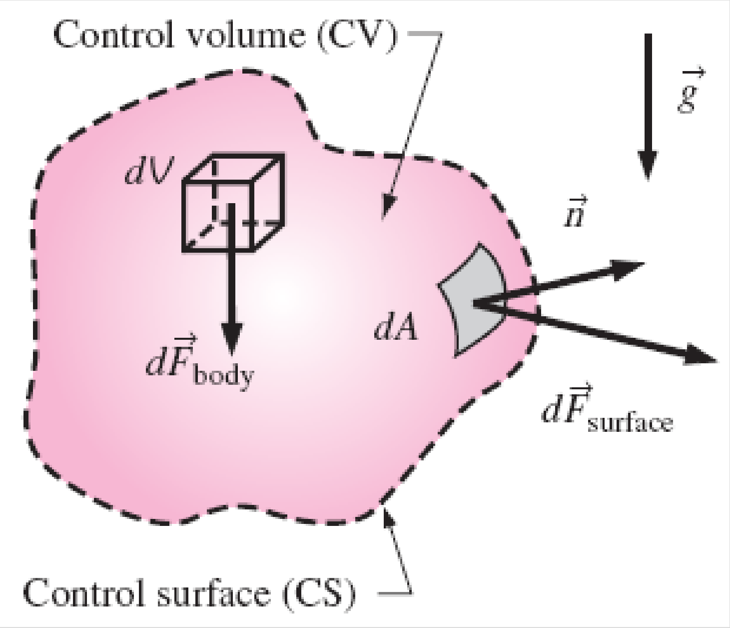
(a) Sabit, (b) hareketli ve (c) şekil değiştiren kontrol hacimlerine örnekler.

6–3 ■ KONTROL HACMİNE ETKİYEN KUVVETLER

Bir kontrol hacmine etkiyen kuvvetler;
Kontrol hacminin tümüne etkiyen kütle kuvvetleri (yerçekimi, elektrik ve manyetik alan kuvvetleri gibi)
ve
Kontrol yüzeyine etkiyen yüzey kuvvetleridir (basınç kuvvetleri, viskoz kuvvetler ve temas noktalarındaki tepki kuvvetleri gibi).

Analizde sadece dış kuvvetler hesaba katılır.

Kontrol hacmine etkiyen tüm kuvvetler: $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{body}} + \sum \vec{F}_{\text{surface}}$



Kontrol hacmine etkiyen toplam kuvvet, kütle ve yüzey kuvvetlerinden oluşur; kütle kuvveti diferansiyel hacim elemanı üzerinde, yüzey kuvveti ise diferansiyel yüzey elemanı üzerinde gösterilmiştir.

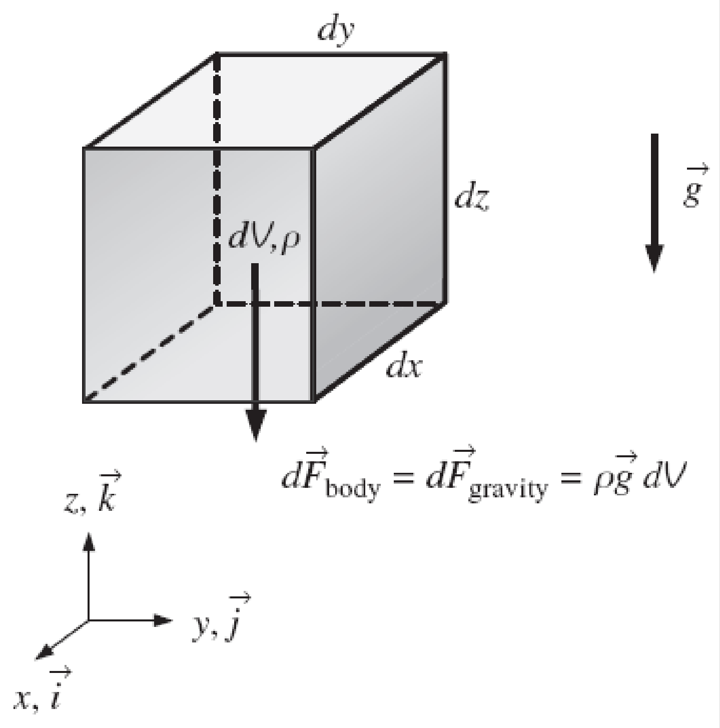
En yaygın kütle kuvveti, kontrol hacminin her bir diferansiyel elemanına aşağıya doğru etkiyen bir kuvvet olan yerçekimidir.

Gravitational force acting on a fluid element: $$d\vec{F}_{\text{gravity}} = \rho\vec{g}\, dV$$

Gravitational vector in Cartesian coordinates: $$\vec{g} = -g\vec{k}$$

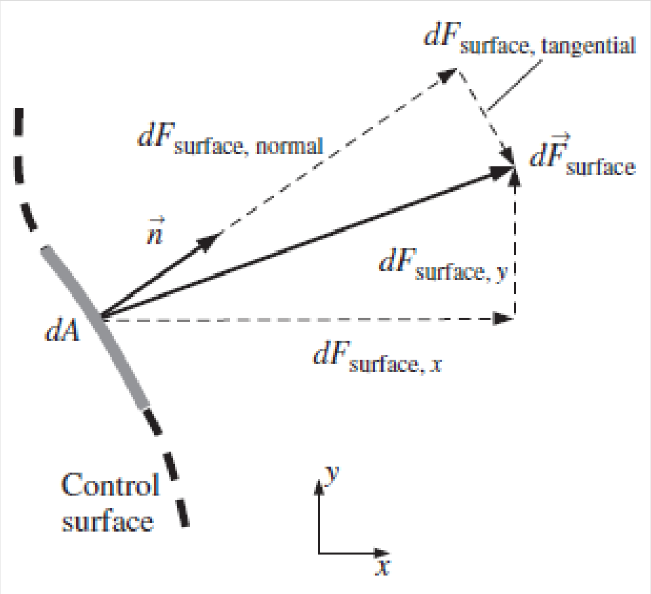
Total body force acting on control volume: $$\sum \vec{F}_{\text{body}} = \int_{CV} \rho\vec{g}\, dV = m_{CV}\vec{g}$$

Total force: $$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{total force}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{gravity}}}_{\text{body force}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{pressure}} + \sum \vec{F}_{\text{viscous}} + \sum \vec{F}_{\text{other}}}_{\text{surface forces}}$$

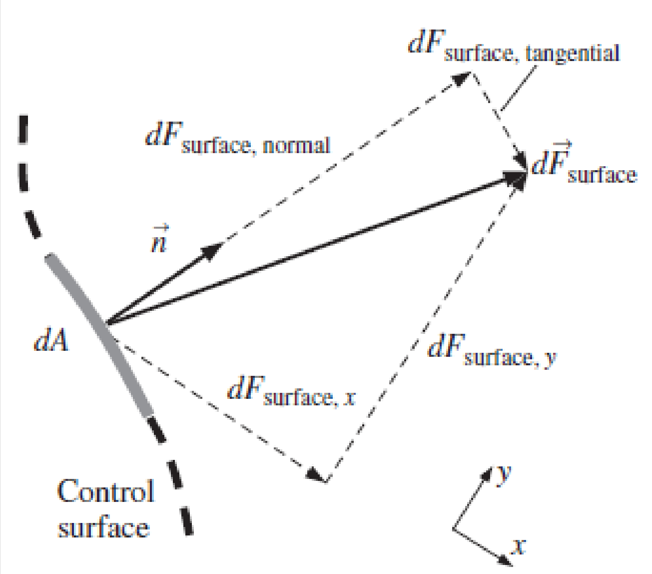


Yüzey kuvvetlerinin analizi, hem normal hem de teğetsel bileşenlerden oluştukları için kolay değildir.
Normal gerilmeler, basınç (Her zaman yüzeyin normali doğrultusunda içeri doğru etkir) ve viskoz gerilmelerden oluşur. **Kayma gerilmeleri** tamamen viskoz gerilmelerden oluşur.

Akışkanın diferansiyel hacim elemanına etkiyen yerçekimi kuvveti onun ağırlığına eşittir. Yerçekimi vektörünün *aşağı doğru negatif z- yönünde olması için eksenler döndürülmüştür.*



(a)



(b)

Diferansiyel yüzey elemanına etkiyen yüzey kuvveti:

$$d\vec{F}_{\text{surface}} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

Kontrol yüzeyine etkiyen toplam yüzey kuvveti:

$$\sum \vec{F}_{\text{surface}} = \int_{\text{CS}} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{body}} + \sum \vec{F}_{\text{surface}} = \int_{\text{CV}} \rho \vec{g}\, dV + \int_{\text{CS}} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

Toplam Kuvvet:

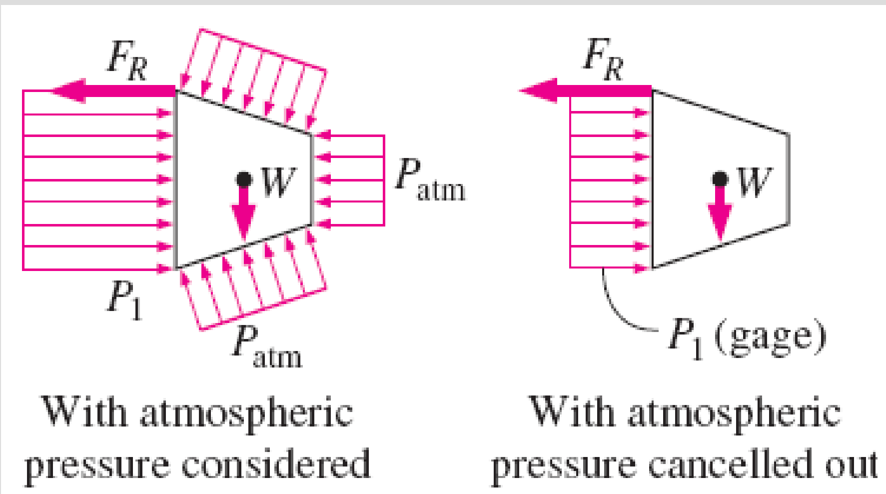
$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{total force}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{gravity}}}_{\text{body force}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{pressure}} + \sum \vec{F}_{\text{viscous}} + \sum \vec{F}_{\text{other}}}_{\text{surface forces}}$$

Koordinat eksenleri (a)'dan (b) 'ye döndürüldüğünde, yüzey kuvvetinin kendisi aynı kalsa da bileşenleri değişir. Burada sadece iki boyut gösterilmiştir.

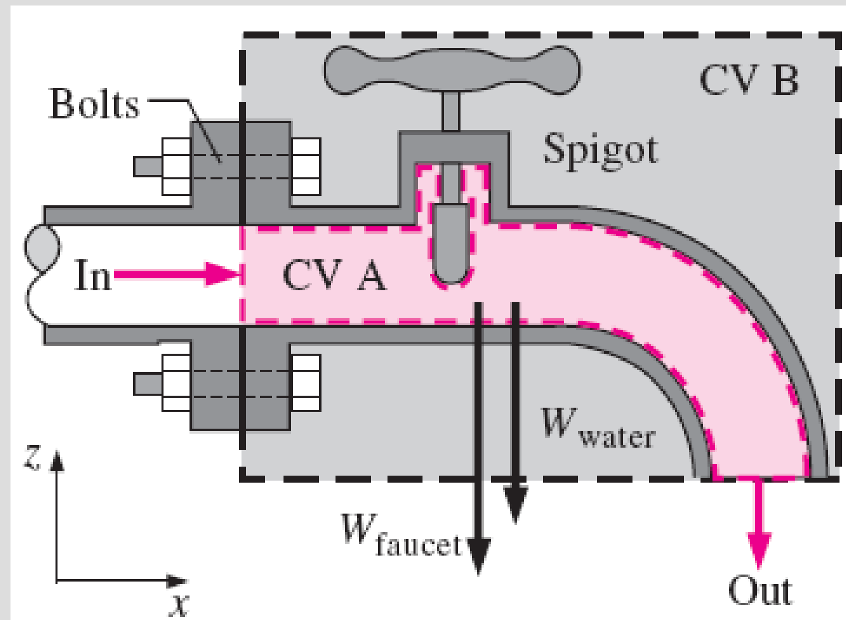
Newton'un hareket yasaları uygulanırken yapılan yaygın bir basitleştirme de, *atmosferik basıncın çıkarılması ve etkin basınç ile çalışılmasıdır.*

Bunun nedeni atmosferik basıncın her yönden etkimesi ve bu etkilerin her yönde birbirlerini dengelenmesidir.

Bu aynı zamanda akışkanın atmosfere boşaldığı çıkış bölümündeki basınç kuvvetlerinin de ihmal edilebileceği anlamım taşır, çünkü ses altı hızlarda çıkış basıncı atmosferik basınca çok yakındır.



Atmosferik basınç her yönden etkir; bu nedenle kuvvet dengeleri yazılırken, atmosferik basıncın etkisi her bir yönde sadeleşeceğinden, güz ardı edilebilir.



Kontrol hacmi seçiminin akıllıca yapılmasının önemini gösteren bir musluk en-kesiti; CV-B ile çalışmak, CV-A ile çalışmaktan çok daha kolaydır.

6–4 ■ DOĞRUSAL MOMENTUM DENKLEMİ

Newton's second law for a system of mass m subjected to net force $\Sigma\vec{F}$ is expressed as

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \qquad \textbf{(6–13)}$$

where $m\vec{V}$ is the **linear momentum** of the system. Noting that both the density and velocity may change from point to point within the system, Newton's second law can be expressed more generally as

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\text{sys}} \rho\vec{V}\, dV \qquad \textbf{(6–14)}$$

where $\rho\vec{V}\, dV$ is the momentum of a differential element dV, which has mass $\delta m = \rho dV$.

Newton'un ikinci yasası; *bir sisteme etkiyen dış kuvvetlerin toplamı,* ***sistemin doğrusal momentumunun*** *birim zamandaki değişimine (veya değişim hızına) eşittir şeklinde de ifade edilebilir.*

Bu ifade, hareketsiz ya da sabit hızla hareket eden bir koordinat sistemi için geçerlidir.

$$\frac{d(m\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho \vec{V}\, dV + \int_{CS} \rho \vec{V}\,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

General: $$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho \vec{V}\, dV + \int_{CS} \rho \vec{V}(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{CS}$$

$$\begin{pmatrix}\text{The sum of all}\\ \text{external forces}\\ \text{acting on a CV}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{The time rate of change}\\ \text{of the linear momentum}\\ \text{of the contents of the CV}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{The net flow rate of}\\ \text{linear momentum out of the}\\ \text{control surface by mass flow}\end{pmatrix}$$

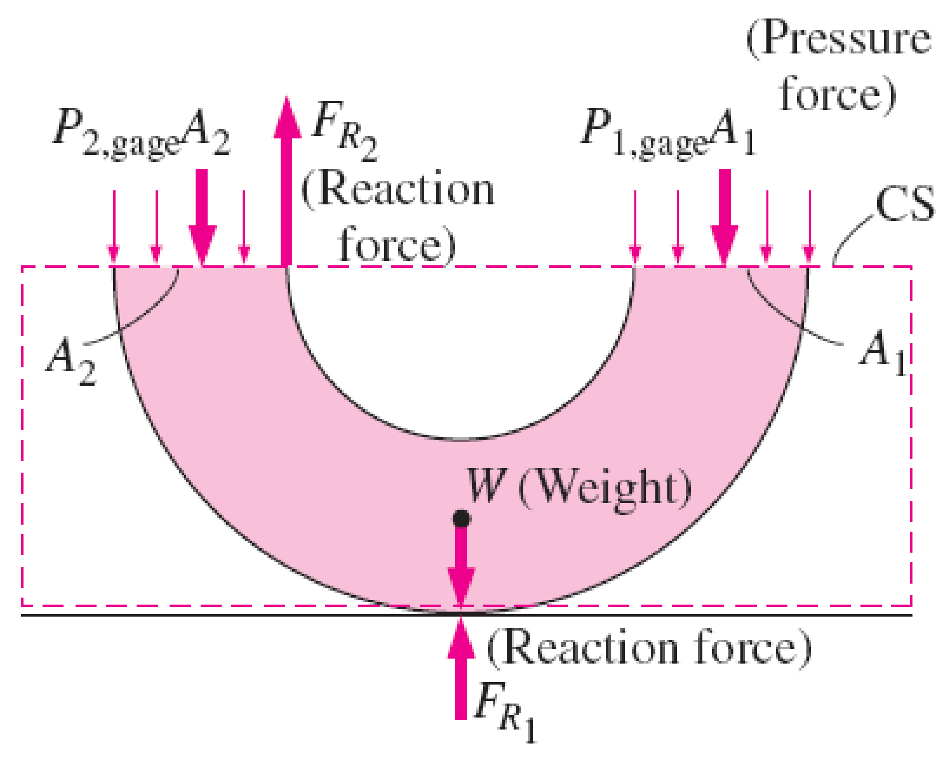
Fixed CV: $$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho \vec{V}\, dV + \int_{CS} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho b\, dV + \int_{CS} \rho b(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

$$B = m\vec{V} \qquad b = \vec{V} \qquad b = \vec{V}$$

$$\frac{d(m\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho \vec{V}\, dV + \int_{CS} \rho \vec{V}(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

Reynolds transport teoremindeki *B, momentum* $m\vec{V}$ *ile, b ise birim kütle başına momentum* $\vec{V}$ *ile değiştirilerek doğrusal momentum denklemi elde edilir.*



An 180° elbow supported by the ground

Momentum denklemi, akışın genellikle destek sistemlerinde ya da bağlantı elemanlarında neden olduğu kuvvetlerin hesabında yaygın olarak kullanılır.

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho \vec{V}\, dV + \int_{CS} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA$$

Akış sistemlerinin çoğunda *ΣF kuvveti; ağırlık, basınç ve tepki kuvvetlerinden oluşur. Atmosferik basınç, kontrol yüzeyinin her tarafında sadeleşeceği için burada etkin basınç kullanılır.*

Özel Durumlar

$$\sum \vec{F} = \int_{CS} \rho \vec{V}\,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\,dA$$

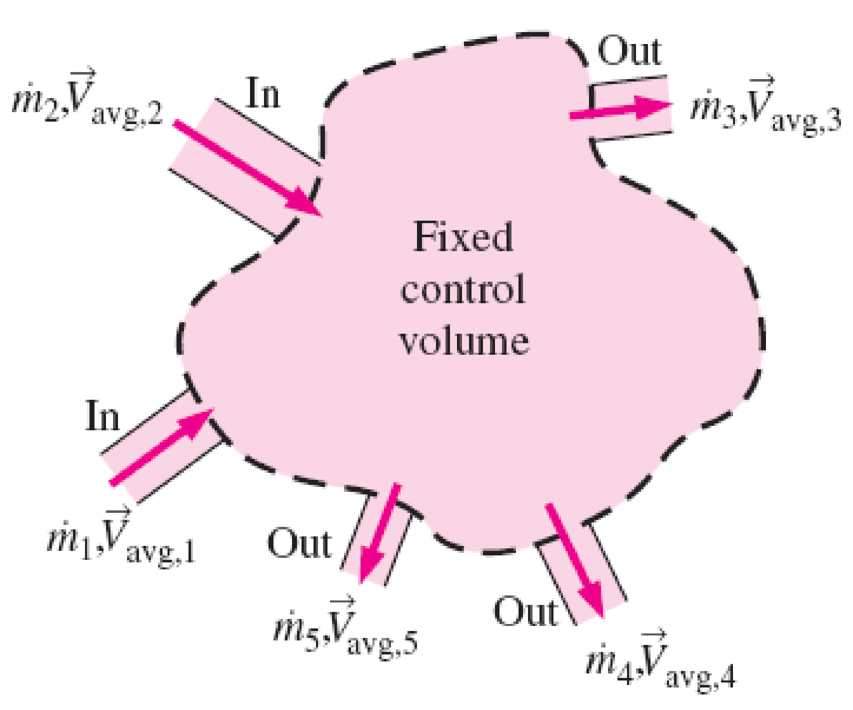
Daimi Akış

$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\,dA_c = \rho V_{avg} A_c$$

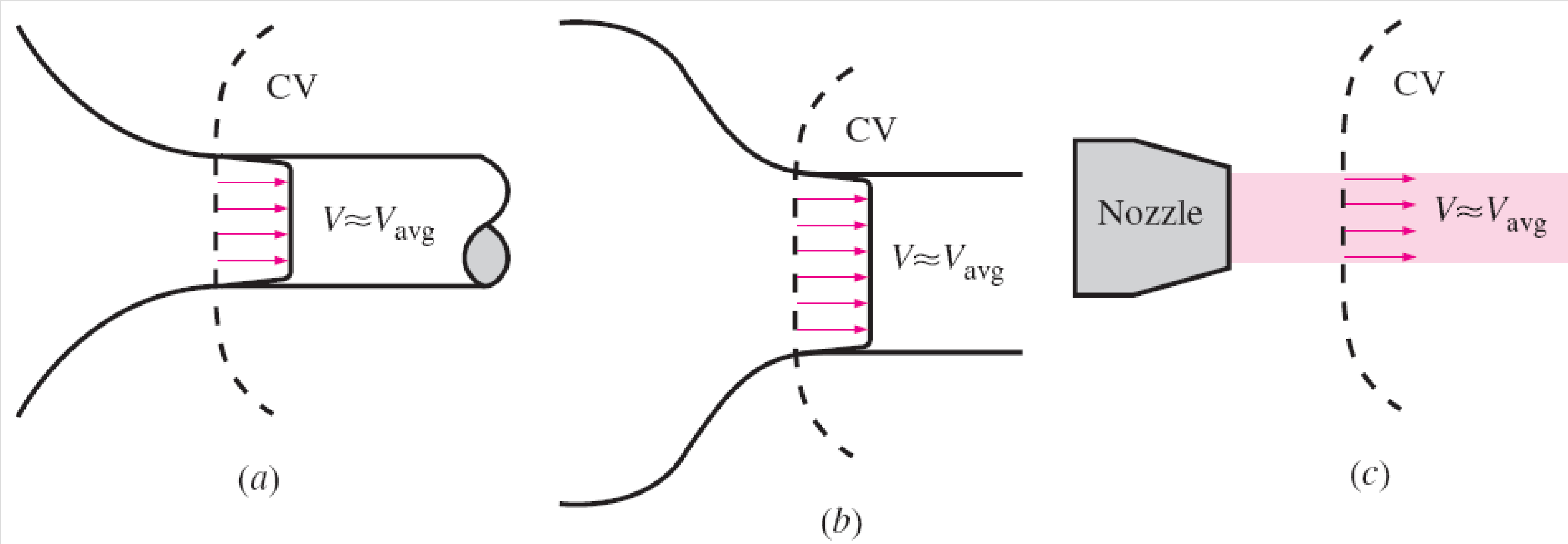
Giriş ya da çıkıştaki kütlesel debi

$$\int_{A_c} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\,dA_c = \rho V_{avg}\, A_c \vec{V}_{avg} = \dot{m}\vec{V}_{avg}$$

Üniform giriş ya da çıkışta momentinin debisi:



Tipik bir mühendislik probleminde, kontrol hacminin çok sayıda giriş ve çıkışı vardır; her bir giriş ya da çıkışta kütlesel debi m ve ortalama hız V_{avg} tanımlanır.



Üniform akış yaklaşımının geçerli olduğu giriş veya çıkış örnekleri:
(a) Bir borunun iyi yuvarlatılmış girişi;
(b) Rüzgâr tünelinin test bölümünün girişindeki akış ve;
(c) Hava içerisindeki serbest su jeti.

Momentum-Akısı Düzeltme Faktörü, β

Mühendislik uygulamalarında giriş ve çıkışların çoğundaki hızlar ne yazık ki üniform değildir..

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\vec{V}\, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \qquad (6\text{-}17)$$

Denklem 6-17 'nin sabit bir kontrol hacmi için cebirsel formül; kontrol yüzeyi üzerindeki her bir giriş ve çıkış için farklı bir değer alan momentum akısı düzeltme faktörü kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\vec{V}\, d\mathcal{V} + \sum_{\text{out}} \beta\dot{m}\vec{V}_{\text{avg}} - \sum_{\text{in}} \beta\dot{m}\vec{V}_{\text{avg}}$$

Momentum flux across an inlet or outlet: $\displaystyle \int_{A_c} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c = \beta\dot{m}\vec{V}_{\text{avg}}$

$$\beta = \frac{\displaystyle\int_{A_c} \rho V(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c}{\dot{m}V_{\text{avg}}} = \frac{\displaystyle\int_{A_c} \rho V(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c}{\rho V_{\text{avg}} A_c V_{\text{avg}}}$$

β her zaman 1 ‘e eşit yada büyüktür.

β türbülanslı akış için 1 ’e yakın ve tam gelişmiş laminar akış için 1 ’den büyüktür.

Momentum-flux correction factor: $\displaystyle \beta = \frac{1}{A_c}\int_{A_c} \left(\frac{V}{V_{\text{avg}}}\right)^2 dA_c$

Örnek 1: Laminer Boru Akışı İçin Momentum-Akısı Düzeltme Faktörü

Dairesel kesitli çok uzun düz bir borudaki laminer akışı göz önüne alınız. Boru en-kesitindeki hız profilinin parabolik ve eksenel hız bileşeni

$$V = 2V_{avg}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (1)$$

ile gösterilmiştir. Burada, r borunun iç yarıçapı, V_{avg} *ise ortalama hızdır. Şekil 6-15' te gösterildiği gibi boru akışının, kontrol hacminin bir çıkışını temsil ettiği durumda, borunun bir enkesiti için momentum akısı düzeltme faktörünü hesaplayınız.*

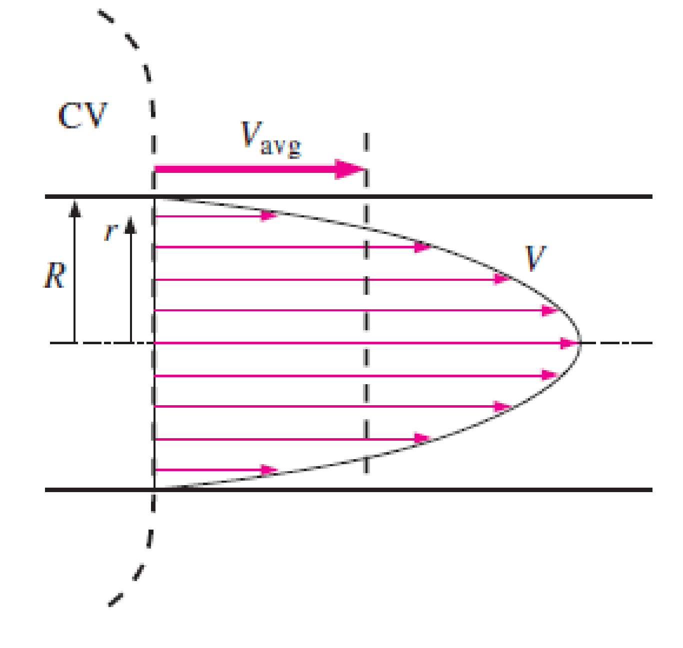


FIGURE 6–15

Akışın tam gelişmiş ve laminer olduğu bir boru en-kesitindeki hız profili.

ÇÖZÜM: Verilen bir hız dağılımı için momentum akısı düzeltme faktörü hesaplanacaktır.
Kabuller: *1) Akış sıkıştırılamaz ve daimidir. 2) Kontrol hacmi boruyu, Şekil 6-15' te gösterildiği gibi, boru eksenine dik olarak kesmektedir.*
Analiz: dAc=2πr olduğunu da dikkate alarak momentum düzeltme faktörünü veren ifade de verilen hız profili yazalım:

$$\beta = \frac{1}{A_c}\int_{A_c}\left(\frac{V}{V_{avg}}\right)^2 dA_c = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 2\pi r\, dr \qquad (2)$$

y = 1 – r^2/R^2 şeklinde yeni bir integrasyon değişkeni tanımlanırsa *dy = -2r dr / R^2 olur (aynı:zamanda, r= 0 da y=1 ve r=R de y=0'dır). Integral alınırsa, tam gelişmiş laminer akış için momentum akısı düzeltme faktörü elde edilir:*

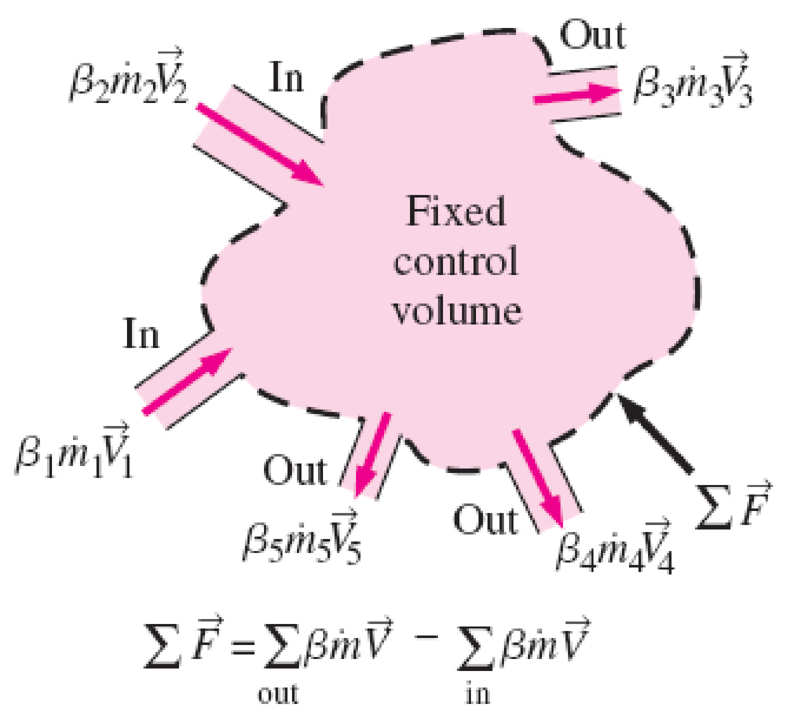
Laminer Akış: $\beta = -4\int_1^0 y^2\, dy = -4\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^0 = \frac{4}{3}$ (3)

β 'nın türbülanslı akışlarda ihmal edilmesinin nihai sonuçlar üzerinde önemli bir etkisi olmasa da, denklemlerde yer alması iyi olur. Böyle yapılması sadece hesapların doğruluğunu arttırmaz, aynı zamanda laminer akışlı kontrol hacmi problemleri çözülürken momentum akısı düzeltme faktörünün β 'nın hesaplara katılması gerektiğini de hatırlatır.

Daimi Akış

Steady linear momentum equation: $$\sum \vec{F} = \sum_{\text{out}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{in}} \beta \dot{m} \vec{V}$$

Daimi akışta kontrol hacmine etkiyen net kuvvet, çıkan ve giren momentum akışlarının hızları arasındaki farka eşittir.



Daimi akışta kontrol hacmine etkiyen net kuvvet, çıkan ve giren momentum akılarının farkına eşittir.

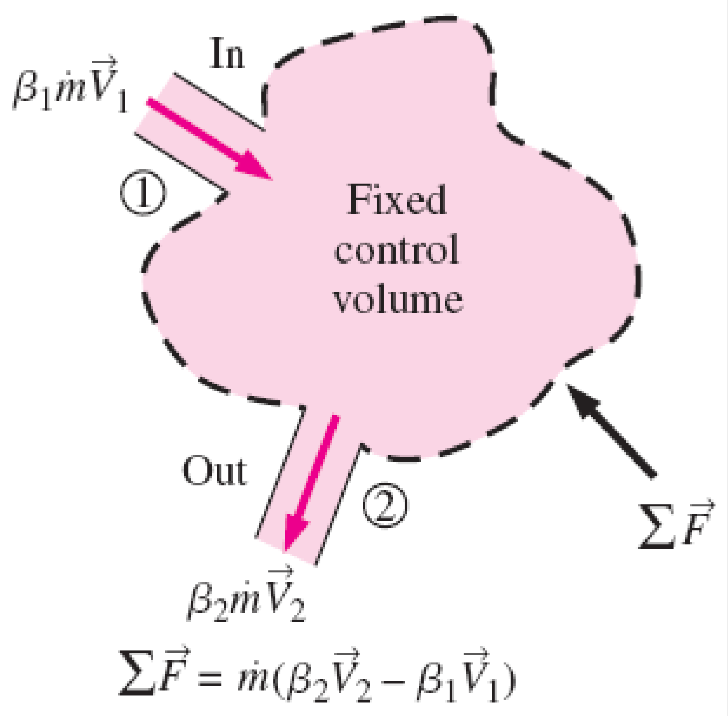
Steady Flow with One Inlet and One Outlet

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\,(\beta_2 \vec{V}_2 - \beta_1 \vec{V}_1)$$

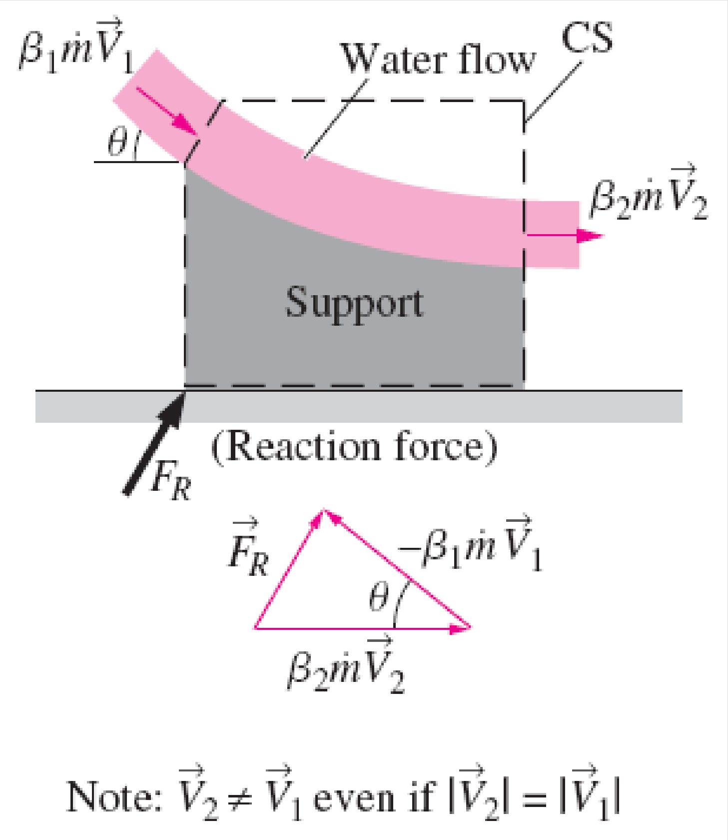
Bir giriş ve bir çıkış

$$\sum F_x = \dot{m}(\beta_2 V_{2,x} - \beta_1 V_{1,x})$$

x-ekseni boyunca



Sadece tek girişi ve tek çıkışı olan bir kontrol hacmi.



Suyun yönünün değiştirilmesi nedeniyle destek elemanında oluşan tepki kuvvetinin vektörel toplam itme belirlenmesi.

Dış kuvvetlerin bulunmadığı akışlar

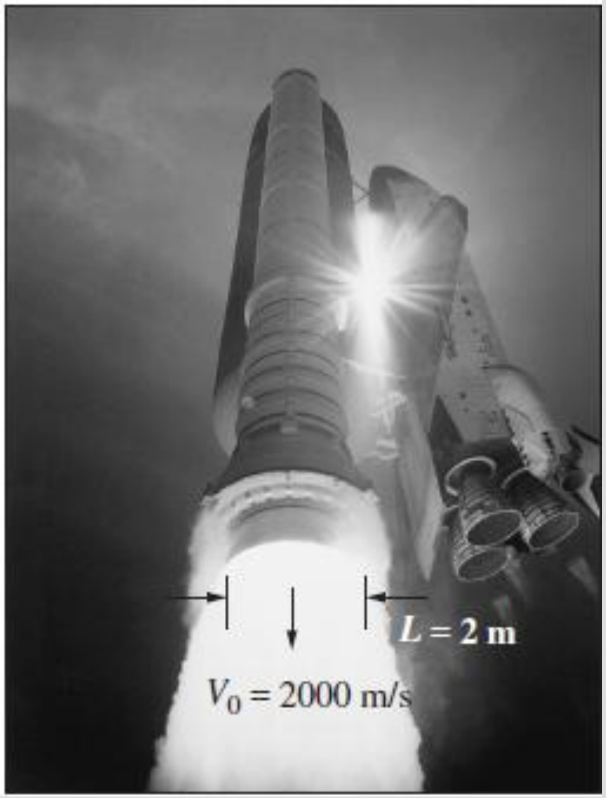
$$\textit{No external forces:} \qquad 0 = \frac{d(m\vec{V})_{CV}}{dt} + \sum_{out} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m}\vec{V}$$

Dış kuvvetlerin bulunmaması halinde bir kontrol hacminin momentumunun değişim hızının, giren ve çıkan momentum akışlarının hızlan arasındaki farka eşit olduğu şeklinde ifade edilebilir.

$$\frac{d(m\vec{V})_{CV}}{dt} = m_{CV}\frac{d\vec{V}_{CV}}{dt} = (m\vec{a})_{CV} = m_{CV}\vec{a}$$

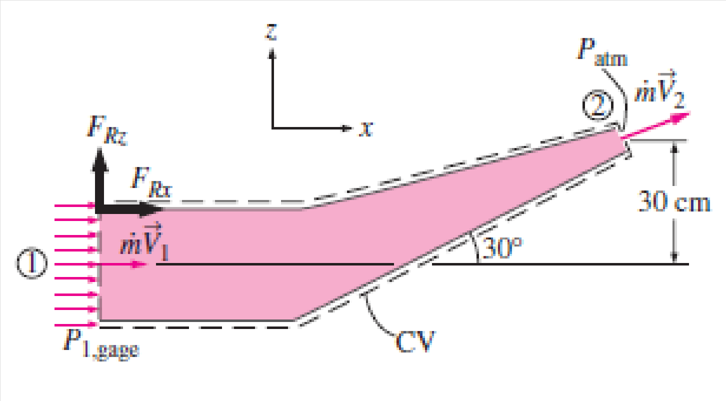
$$\vec{F}_{\text{thrust}} = m_{CV}\vec{a} = \sum_{in} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{out} \beta \dot{m}\vec{V}$$

Uzay mekiğini kaldırmak için gereken itme kuvveti roket motorları ile sağlanır. Bu durum, yakıtın sıfır olan hızının yanma işleminden sonra 2000 m/s civarında bir çıkış hızına yükselmesi sırasında oluşan momentumun değişiminin bir sonucudur.



ÖRNEK 2: Saptırıcı Dirseği Yerinde Tutmak İçin Gerekli Kuvvet

Yatay bir borudan akmakta olan 14 kg/s debisindeki suyu, yatayla 30° açı yapacak şekilde saptırarak hızlandırmak için daralan bir dirsek kullanılmaktadır. Su, dirsekten atmosfere atılmaktadır. Dirseğin giriş ve çıkış kesitlerinin alanları sırasıyla 113 cm^2 ve 7 cm^2'dir. Giriş ve çıkış kesitlerinin merkezleri arasındaki seviye farkı ise 30 cm'dir. Dirseğin ve içerisindeki suyun ağırlığı ihmal edilebilir,
(a) Dirseğin giriş kesitinin merkezindeki etkin basıncı ve
(b) Dirseği yerinde tutabilmek için gerekli kuvveti hesaplayınız.



ÇÖZÜM: Daralan bir dirsek, suyu yukarıya doğru saptırmakta ve atmosfere atmaktadır.. Dirseğin girişindeki basıncın ve dirseği yerinde tutmak için gerekli kuvvetin belirlenmesi istenmektedir.

Kabuller: 1) Akış daimidir ve sürtünme etkileri ihmal edilebilir. 2) Dirseğin ve içerisindeki suyun ağırlıkları ihmal edilmektedir. 3) Su atmosfere atılmaktadır, dolayısıyla çıkıştaki etkin basınç sıfırdır. 4) Kontrol hacminin hem girişinde hem de çıkışında akış türbülanslı ve tam gelişmiştir momentum akısı düzeltme faktörü β=1.03 olarak alınabilir.

Özellikler: Suyun yoğunluğu 1000 kg/m^3 alınabilir.

Analiz: (a) Dirsek, kontrol hacmi olarak alınmış ve giriş 1, çıkış 2 ile numaralandırılmıştır. Şekilde gösterildiği gibi ve 2-koordinat eksenleri kullanılmıştır. Bu tek girişli, tek çıkışlı, daimi akışlı sistem için süreklilik denklem $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = 14$ kg/s. alarak ifa $\dot{m} = \rho A V$ bilir. olduğundan yola çıkarak suyun giriş ve çıkıştaki hızları:

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(0.0113 \text{ m}^2)} = 1.24 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(7 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 20.0 \text{ m/s}$$

olarak elde edilir. Bernoulli denklemi, ilk yaklaşım olarak basıncın hesaplanması için kullanılabilir, Çeperlerdeki sürtünme kayıplarının nasıl hesaplanacağı Bölüm 8'de anlatılacaktır. Giriş kesitinin merkezi referans olarak (z_1=0) alınıp, P_2=P_{atm} olduğu hatırlanarak dirsek ekseni boyunca ilerleyen akım çizgisi için Bernoulli denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho g\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 - z_1\right)$$

$$P_1 - P_{\text{atm}} = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) \times \left(\frac{(20 \text{ m/s})^2 - (1.24 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + 0.3 - 0\right)\left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$

$$P_{1,\text{ gage}} = 202.2 \text{ kN/m}^2 = \mathbf{202.2 \text{ kPa}} \quad \text{(gage)}$$

(b) Bir boyutlu daimi akış için momentum denklemi

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{out}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{in}} \beta \dot{m} \vec{V}$$

Dirseği yerinde tutmak için gerekli kuvvetin *x- ve z-bileşenleri olan ve kuvvetlerinin her ikisinin de pozitif yönlü olduğunu kabul edelim. Kontrol yüzeyinin tamamına atmosfer: basıncı etkidiği için etkin basınç kullanılabilir ve x-z eksenleri boyunca momentum denklemleri yazılırsa,*

$$F_{Rx} + P_{1,\text{gage}} A_1 = \beta \dot{m} V_2 \cos\theta - \beta \dot{m} V_1$$
$$F_{Rz} = \beta \dot{m} V_2 \sin\theta$$

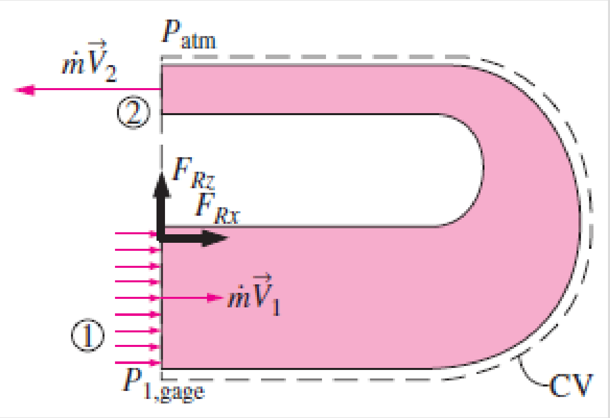
elde edilir. Burada $\beta=\beta_1=\beta_2$. F_{Rx} ve F_{Rz}'in çözülmesi için verilen değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \beta \dot{m}(V_2 \cos\theta - V_1) - P_{1,\text{gage}} A_1 \\ &= 1.03(14\ \text{kg/s})[(20 \cos 30^\circ - 1.24)\ \text{m/s}]\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) \\ &\quad - (202{,}200\ \text{N/m}^2)(0.0113\ \text{m}^2) \\ &= 232 - 2285 = -2053\ \text{N} \end{aligned}$$

$$F_{Rz} = \beta \dot{m} V_2 \sin\theta = (1.03)(14\ \text{kg/s})(20 \sin 30^\circ\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 144\ \text{N}$$

bulunur. F_{Rx} 'in sonucunun negatif olması kabul edilen yönün yanlış olduğunu göstermektedir ve ters çevrilmelidir. Bu nedenle negatif x-yönünde etkir.

Örnek 3:Ters Döndürücü Dirseği Yerinde Tutmak İçin Gerekli Kuvvet



Örnek 2'deki saptırıcı dirsek, şekilde gösterildiği gibi akışkana dışarı atılmadan önce 180° U dönüşü yaptıran bir ters döndürücü dirsek ile değiştirilmiştir. Giriş ve çıkış kesitlerinin merkezleri arasındaki seviye farkı yine 0.3 m'dir. Dirseği yerinde tutmak için gerekli kuvveti hesaplayınız. Çözüm: Giriş ve çıkış hızları ile dirseğin girişindeki basınç aynı kalmaktadır. Ancak bu durumda düşey doğrultuda başka herhangi bir kuvvet ya da momentum akısı (dirseğin ve suyun ağırlıkları ihmal edilmektedir) olmadığından, yerinde tutma kuvvetinin dirseğin boruya bağlantı noktasındaki düşey bileşeni sıfırdır (F_{Rz}= 0). Yerinde tutma kuvvetinin yatay bileşeni ise x yönünde yazılacak momentum denklemiyle belirlenebilir. Çıkış hızının negatif x-yönünde olduğuna dikkat edilerek momentum denklemi yazılırsa:

$$F_{Rx} + P_{1,\,gage}A_1 = \beta_2\dot{m}(-V_2) - \beta_1\dot{m}V_1 = -\beta\dot{m}(V_2 + V_1)$$

F_{Rx} çekilip, bilinen sayısal değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= -\beta\dot{m}(V_2 + V_1) - P_{1,\,gage}A_1 \\ &= -(1.03)(14\ \text{kg/s})[(20 + 1.24)\ \text{m/s}]\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) - (202{,}200\ \text{N/m}^2)(0.0113\ \text{m}^2) \\ &= -306 - 2285 = -2591\ \text{N} \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuçtan flanştaki yatay kuvvetin negatif x-yönünde ve 2591N olduğu anlaşılmaktadır (bu kuvvet dirseği borudan ayırmaya çalışmaktadır). Bu kuvvet yaklaşık olarak 260 kg lık bir kütlenin ağırlığına eşittir ve dolayısıyla bağlantıda kullanılarak cıvata gibi bağlantı elemanları bu kuvvete dayanabilmelidir.

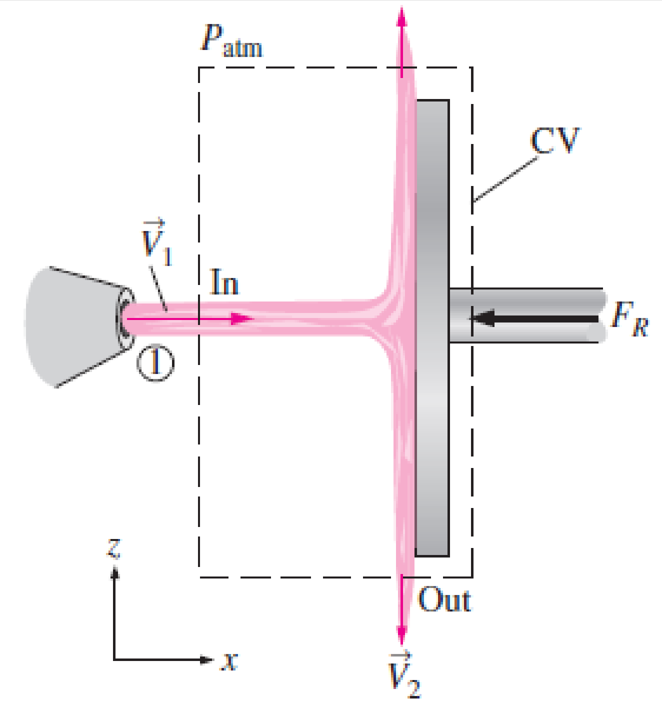
İrdeleme: Çeperlerin suyu çok daha büyük bir açıyla döndürmesi nedeniyle burada hesaplanan x yönündeki tepki kuvveti, Örnek 2'dekinden daha büyüktür:

Örnek 4: Sabit Bir Plakaya Çarpan Su Jeti

Ortalama hızı bir lüle ile 20 m/s'ye çıkarılan 10 kg/s debili su jeti, düşey sabit bir plakaya dik olarak çarptırılmaktadır. Su, çarpmadan sonra plaka düzleminde her yöne dağılmaktadır. Suyun etkisi ile plakanın yatay yönde hareket etmesini engellemek için gerekli kuvveti belirleyiniz.

ÇÖZÜM: Bir su jeti düşey sabit bir plakaya dik olarak çarpmaktadır. Plakayı yerinde tutmak için gerekli kuvvetin belirlenmesi istenmektedir.

Kabuller: 1) Lüle çıkışında suyun akışı daimidir. 2) Su, su jetinin geliş yönüne dik yönlerde dağılmaktadır. 3) Su jeti atmosfere açıktır. Dolayısıyla su jetinin ve dağılarak kontrol hacmini terk eden suyun basıncı da atmosferik basınca eşittir sisteme etkidiği için ihmal edilebilir.
4) Düşey kuvvetler ve momentum akıları, yatay tepki kuvvetine etkileri olmadığından göz önüne alınmamaktadır. 5) Momentum akısı düzeltme faktörü ihmal edilebilir, dolayısıyla β≈1 alınabilir.



Analiz: *Bu problem için kontrol hacmini; plakanın tamamını kapsayacak, su jetini ve* plakayı tutan destek elemanını dik kesecek şekilde çizilelim. Bir boyutlu daimi akış için momentum denklemi:

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{out}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{in}} \beta \dot{m} \vec{V} \qquad (1)$$

Bu problem için yukarıdaki denklem, x-yönünde, (negatif x-yönündeki kuvvetlerin ve hızların negatif işaretleri unutulmadan) $V_{1,x}=V_1$ ve $V_{2,x}=0$ olduğuna dikkat edilerek yazılırsa,

$$-F_R = 0 - \beta \dot{m} V_1$$

elde edilir. Verileri sayısal değerler yerine yazılarak,

$$F_R = \beta \dot{m} V_1 = (1)(10 \text{ kg/s})(20 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 200 \text{ N}$$

bulunur. Yani destek elemanı, plakayı yerinde tutabilmek için negatif x-yönünde (su jetinin tersi yönde) 200 N'luk (yaklaşık 20 kg kütlenin ağırlığına eşit) yatay bir kuvvet uygulamalıdır.

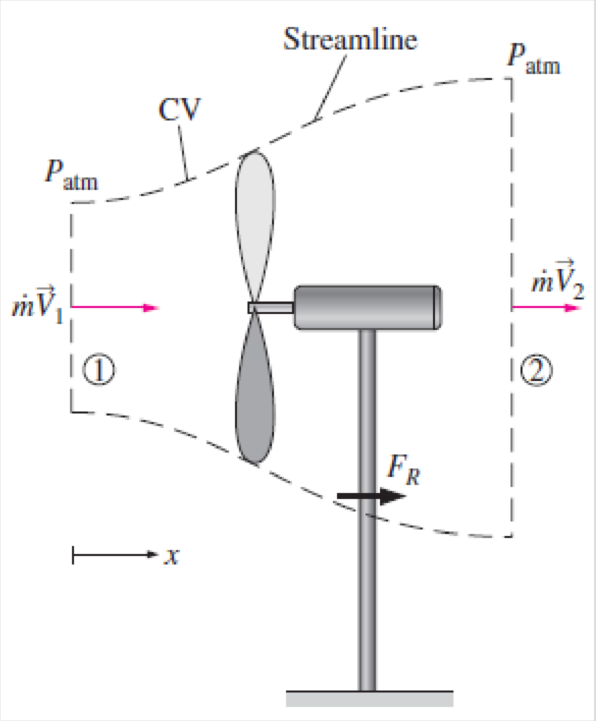
İrdeleme: Plaka, su jetinin momentum darbesinin tamamını emmektedir çünkü kontrol hacminin çıkışında x-yönündeki momentum sıfırdır. Kontrol hacmi, plaka ile suyun ara yüzeyi boyunca çizilseydi ilave basınç kuvvetleri de (bilinmeyen) analize dahil edilmiş olurdu. Kontrol hacmini destek elemanını kesecek şekilde seçerek bu ilave karmaşıklıkların önüne geçmiş olduk. Buradaki durum, kontrol hacminin "akıllıca" seçilmesine iyi bir örnektir.

ÖRNEK 5: Bir Rüzgâr Türbininin Ürettiği Güç ve Rüzgâr Yükü

Kanat çapı 9.14 m olan bir rüzgâr türbininin çalışabildiği minimum rüzgâr hızı 11.3 km/h 'dir. Türbin bu koşullarda 0.4 kW elektriksel güç üretebilmektedir.

(a) Rüzgâr türbini-jeneratör grubunun verimini

(b) Rüzgâr türbinini taşıyan direğe yatay yönde etkiyen kuvveti hesaplayınız ve rüzgâr hızının iki kat artarak 22.6 km/h 'e çıkmasının güç üretimine ve direğe etkiyen kuvvete etkisi ne olur? Verimin aynı kaldığı ve havanın yoğunluğunun 1.217 kg/m^3 olduğu kabul edilebilir.



Kabuller: 1) sıkıştırılamaz bir akıştır. 2) Türbin Jeneratör grubun üretim verimi rüzgâr hızından bağımsızdır. 3) Sürtünme etkileri ihmal edilebilir yani rüzgârın getirdiği kinetik enerji hiç bir şekilde ısı enerjisine dönüşmemektedir. 4) Rüzgâr türbininden geçen havanın ortalama hızı rüzgârın hızına eşittir. 5) Rüzgârın oluşturduğu hava akışı uniformdur dolayısıyla momentum akısı düzeltme faktörü β =1 alınabilir.

Analiz: Kinetik enerji, bir tür mekanik enerjidir ye dolayısıyla tamamen işe dönüştürülebilir. Bu nedenle rüzgârın güç potansiyeli olan birim kütle için V^2/2 olan kinetik enerjisi ile orantılıdır.

Böylece verilen kütlesel debi için maksimum güç;

$$V_1 = (11.3\ \text{km/h})\left(\frac{0.2778\ \text{m/s}}{1\ \text{km/h}}\right) = 3.14\ \text{m/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 V_1 \frac{\pi D^2}{4} = (1.217\ \text{kg/m}^3)(3.14\ \text{m/s})\frac{\pi(9.14\ \text{m})^2}{4} = 250.73\ \text{kg/s}$$

$$\dot{W}_{maks} = \dot{m}\,\text{ke}_1 = \dot{m}\frac{V_1^2}{2}$$

$$= (250.73\ \text{kg/s})\frac{(3.14\ \text{m/s})^2}{2}$$

$$= 1.236\ \text{kW}$$

olur. (*b*) Sürtünme etkilerinin ihmal edilebilecek kadar az olduğu kabul edilirse, gelen kinetik enerjinin elektrik gücüne dönüştürülemeyen kısmı, rüzgâr türbinini kinetik enerji olarak terk eder. Kütlesel debinin sabit kaldığı hatırlanırsa, çıkış hızı,

$$\dot{m}\mathrm{ke}_2 = \dot{m}\mathrm{ke}_1(1-\eta_{\text{rüzgâr türbini}}) \quad \rightarrow \quad \dot{m}\frac{V_2^2}{2} = \dot{m}\frac{V_1^2}{2}(1-\eta_{\text{rüzgâr türbini}})$$

şeklinde hesaplanabilir. Buna göre,

$$V_2 = V_1\sqrt{1-\eta_{\text{rüzgâr türbini}}} = (3.14\ \mathrm{m/s})\sqrt{1-0.324} = 2.58\ \mathrm{m/s}$$

elde edilir. Rüzgâr türbininin etrafına, rüzgârın kontrol yüzeyine dik olarak girip çıkacağı ve bütün kontrol yüzeyinin atmosferik basınçta kalacağı bir kontrol hacmi çizelim. Bir-boyutlu daimi akış için momentum denklemi,

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m}\vec{V}$$

şeklinde verilmişti. $\beta = 1$, $V_{1,x} = V_1$ ve $V_{2,x} = V_2$ olduğu dikkate alınarak bu denklemin *x*-bileşeni aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_R = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

Bilinen sayısal değerler yerlerine konulursa:

$$F_R = \dot{m}(V_2 - V_1) = (250.73\ \mathrm{kg/s})\,(2.58\ \mathrm{m/s} - 3.14\ \mathrm{m/s})$$
$$= -140.41\ \mathrm{N}$$

sonucu elde edilir. Negatif işaret beklendiği gibi tepki kuvvetinin negatif *x*-yönünde etkidiğini göstermektedir. Dolayısıyla rüzgârın taşıyıcı direğe uyguladığı kuvvet, $F_{\text{direk}} = -F_R =$ **140.41 N** olacaktır.

Kütlesel debi *V* ile, kinetik enerji ise V^2 ile doğru orantılı olduğundan, üretilen güç V^3 ile orantılıdır. Bu nedenle rüzgâr hızının iki katına çıkarak 22.6 km/h olması, üretilen gücü $2^3 = 8$ kat artırarak $0.4 \times 8 = 3.2$ kW'a çıkaracaktır.

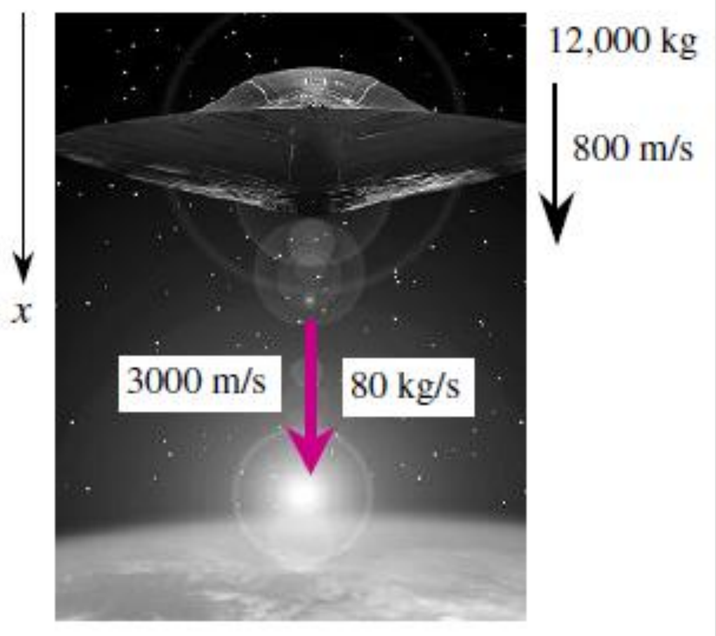
ÖRNEK 6: Bir Uydunun Yeniden Konumlandırılması

Yörüngedeki bir uydunun kütlesi $m_{spacecraft}$ = 12000 kg *'dır ve* V_0 *sabit hızı ile hareket etmektedir. Uydunun yörüngesini değiştirmek için, üzerine yerleştirilen bir roketteki katı yakıtın reaksiyonundan açığa çıkan gaz 80 kg/s debi ile uydunun* V_0 *hızının tersi yönünde* V_{gas}= *3000 m/s hızla atılmaktadır. Yakıtın boşaltılma hızı 5 s süreyle sabit tutulmaktadır:*

(a)Bu 5 s 'lik periyotta uydunun ivmesini,

(b)Bu zaman periyodunda uydunun hızındaki değişimi

(c)Uyduya uygulanan itkiyi belirleyiniz.



ÇÖZÜM: Uyduya ait roket harekete zıt yönde ateşlenmektedir. İvme, hızdaki değişim ve itkinin belirlenmesi istenmektedir.

Kabuller: 1) Yanma ürünü olan gazların akışı, ateşleme süresince bir-boyutlu ve daimidir. 2) Uyduya etkiyen başka bir dış kuvvet yoktur ve lülenin çıkışındaki basınç kuvvetinin etkisi ihmal edilebilir. 3) Atılan yakıtın kütlesi uydunun kütlesinin yanında ihmal edilebilir ve böylece uydu kütlesi sabit bir katı cisim gibi değerlendirilebilir. 4) Lüle, momentum akısı düzeltme faktörü ihmal edilebilecek kadar iyi tasarlanmıştır dolayısıyla β=1 alınabilir.

Analiz: (a) Kontrol hacminin uydu ile birlikte hareket ettiği bir referans koordinat sistemi seçelim. Böylece akışkan hızları, sadece hareketli gövdeye göre olan bağıl hızlar haline gelir. Uydunun hareket yönü x ekseni boyunca pozitif yön olarak kabul edilmiştir. Uyduya etkiyen dış kuvvet yoktur ve uydunun kütlesi yaklaşık olarak sabittir. Bu nedenle uydu, kütlesi sabit bir katı cisim gibi kabul edilebilir ve böylece momentum denklemi aşağıdaki gibi basitçe yazılabilir:

$$\vec{F}_{\text{thrust}} = m_{\text{spacecraft}}\vec{a}_{\text{spacecraft}} = \sum_{\text{in}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{out}} \beta\dot{m}\vec{V}$$

Hareketin düz bir çizgisel yörünge üzerinde olduğu ve atılan gazların negatif x yönünde hareket ettiği dikkate alınarak büyüklükler cinsinden momentum denklemi,

$$m_{\text{spacecraft}}a_{\text{spacecraft}} = m_{\text{spacecraft}}\frac{dV_{\text{spacecraft}}}{dt} = -\dot{m}_{\text{gas}}V_{\text{gas}}$$

Sayısal değerler yerine yazılarak, ilk 5 s 'de uydunun ivmesi belirlenebilir:

$$a_{spacecraft} = \frac{dV_{spacecraft}}{dt} = -\frac{\dot{m}_{gas}}{m_{spacecraft}} V_{gas} = -\frac{80 \text{ kg/s}}{12{,}000 \text{ kg}}(+3000 \text{ m/s}) = -20 \text{ m/s}^2$$

(b) İvme bilindiğine göre ilk 5 s'de uydunun hızındaki değişim, ivmenin tanımından, $a_{spacecraft} = dV_{spacecraft}/dt$ hesaplanabilir:

$$dV_{spacecraft} = a_{spacecraft} dt \rightarrow \Delta V_{spacecraft} = a_{spacecraft} \Delta t = (-20 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = -100 \text{ m/s}$$

etki eden itki :

$$F_{thrust} = 0 - \dot{m}_{gas} V_{gas} = 0 - (80 \text{ kg/s})(+3000 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = -240 \text{ kN}$$

İrdeleme: Şayet uydu herhangi bir yere bağlı olsaydı, uydunun bağlantı noktasına 240 kN (24 ton kütlenin ağırlığına eşit) kuvvet uygulayacağına dikkat ediniz. Bu sonuç, uyduyu sistem olarak ele alıp, momentum denklemi uygulanarak doğrulanabilir

ÖRNEK 6–7 Bir Flanşa Etkiyen Net Kuvvet Net

Bir sürgülü vanayla yarı kapalı vaziyette bulunan flanşlı bir musluktan 70 L/dakika debiyle su akmaktadır (Şekil 6–26). Flanşın bulunduğu bölümde borunun iç çapı 19.8 mm ve bu noktada ölçülen basınç 89.63 kPa'dır. Musluğun ve içindeki suyun toplam ağırlığı 56.94 N'dur. Flanşa etkiyen net kuvveti hesaplayınız.

ÇÖZÜM Flanşlı bir musluktan olan su akışı ele alınmaktadır. Flanşa etkiyen net kuvvetin hesaplanması istenmektedir.

Kabuller **1** Akış sıkıştırılamaz ve daimidir. **2** Girişteki ile çıkıştaki akışlar tam gelişmiş ve türbülanslıdır dolayısıyla momentum akısı düzeltme faktörü yaklaşık olarak 1.03'tür. **3** Musluğun çıkış çapı, flanştaki giriş çapı ile aynıdır.

Özellikler Suyun oda sıcaklığındaki yoğunluğu 998 kg/m³'tür.

Analiz Şekil 6–26'da, üzerine etkiyen tüm kuvvetler ile birlikte gösterildiği gibi, musluk ve yakın çevresi kontrol hacmi olarak seçilmiştir. Kontrol hacmine etkiyen bu kuvvetler; suyun ve musluğun toplam ağırlığı, kontrol hacminin girişindeki etkin basıncın oluşturduğu kuvvet ve $\vec{F}_R$ ile gösterilen flanşa etkiyen net kuvvettir. Kontrol yüzeyinin diğer bölümlerinde etkin basınç sıfır (atmosferik basınç) olduğu için kolaylık olması bakımından etkin basınç kullanılacaktır. Akış sıkıştırılamaz kabul edildiği ve kontrol hacminin çıkışındaki basınç da atmosferik olduğu için çıkıştaki etkin basıncın da sıfır olduğuna dikkat ediniz.

Kontrol hacmi korunum artık yasalarını uygulayabiliriz. Kütlenin korunumu bu durumda önemsizdir, çünkü sadece bir giriş ile bir çıkış vardır ve kontrol hacmine giren kütlesel debi, kontrol hacminden çıkan kütlesel debiye eşittir. Ayrıca giren ve çıkan akışların ortalama hızları da aynıdır, çünkü iç çap sabit ve su sıkıştırılamaz bir akışkandır. Buna göre ortalama hızlar:

$$V_2 = V_1 = V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{70\ \text{L/dakika}}{\pi(0.0198\ \text{m})^2/4}\left(\frac{0.001\ \text{m}^3}{1\ \text{L}}\right)\left(\frac{1\ \text{dakika}}{60\ \text{s}}\right) = 3.79\ \text{m/s}$$

şeklinde belirlenebilir. Aynı zamanda,

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (998\ \text{kg/m}^3)(70\ \text{L/dakika})\left(\frac{0.001\ \text{m}^3}{1\ \text{L}}\right)\left(\frac{1\text{dakika}}{60\ \text{s}}\right) = 1.16\ \text{kg/s}$$

olarak hesaplanır. Artık daimi akış momentum denklemini uygulayabiliriz:

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V}$$

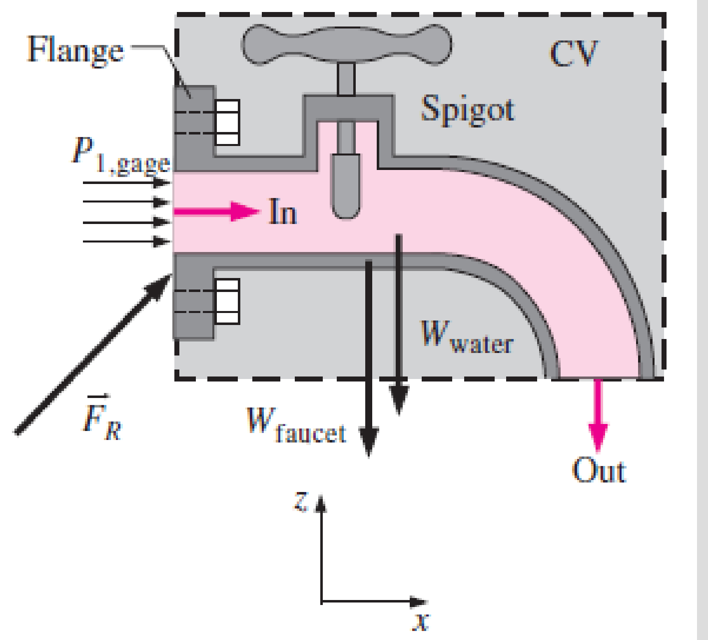


FIGURE 6–25
Control volume for Example 6–7 with all forces shown; gage pressure is used for convenience.

Flanşa etkiyen kuvvetin x- ve z-bileşenleri, yönleri pozitif olan F_{Rx} ve F_{Rz} olsun. Girişte x-yönündeki hızın şiddeti $+V_1$ fakat çıkışta sıfırdır. Girişte z-yönündeki hızın büyüklüğü sıfır ancak çıkışta $-V_2$'dir. Ayrıca musluk ve içindeki suyun ağırlığı da $-z$-yönünde bir kütle kuvveti olarak etkir. Seçilen kontrol hacmine z-yönünde herhangi bir basınç kuvveti ya da viskoz kuvvet etkimemektedir.

Buna göre x- ve z-yönlerindeki momentum denklemleri:

$$F_{Rx} + P_{1,\text{etkin}} A_1 = 0 - \dot{m}(+V_1)$$

$$F_{Rz} - W_{\text{musluk}} - W_{\text{su}} = \dot{m}(-V_2) - 0$$

olur. Bu denklemler F_{Rx} and F_{Rz} için çözülüp verilen değerler yerlerine yazılırsa,

$$F_{Rx} = -\dot{m}(V_1) - P_{1,\text{etkin}} A_1$$

$$= -(1.16\ \text{kg/s})(3.79\ \text{m/s}) - (89.63\ \text{kPa})\,\frac{\pi(0.0198\ \text{m})^2}{4}$$

$$= -32\ \text{N}$$

$$F_{Rz} = -\dot{m}V_2 + W_{\text{musluk + su}}$$

$$= -(1.16\ \text{kg/s})(3.79\ \text{m/s}) + 56.94\ \text{N} = 52.54\ \text{N}$$

elde edilir. Bu durumda flanşın, kontrol hacmi üzerine uyguladığı net kuvvet, vektörel formda,

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Rz}\vec{k} = -32\vec{i} + 52.54\vec{k}\ \ \text{N}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, Newton'un üçüncü yasasından, musluk bağlantısının flanşa uyguladığı kuvvet, $\vec{F}_R$'nin negatifi olup

$$\vec{F}_{\text{musluğun flanşa uyguladığı}} = -\vec{F}_R = 32\vec{i} - 52.54\vec{k}\ \ \text{N}$$

şeklinde ifade edilebilir.

6–5 ■ DÖNEL HAREKETİN VE AÇISAL MOMENTUMUN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

Dönel hareket, bir cismin bütün noktalarının dönme ekseni etrafındaki dairesel yörüngeler üzerindeki hareketidir.

Dönel hareket; açısal mesafe θ, açısal hız ω ve açısal ivme α gibi açısal büyüklüklerle tarif edilir.

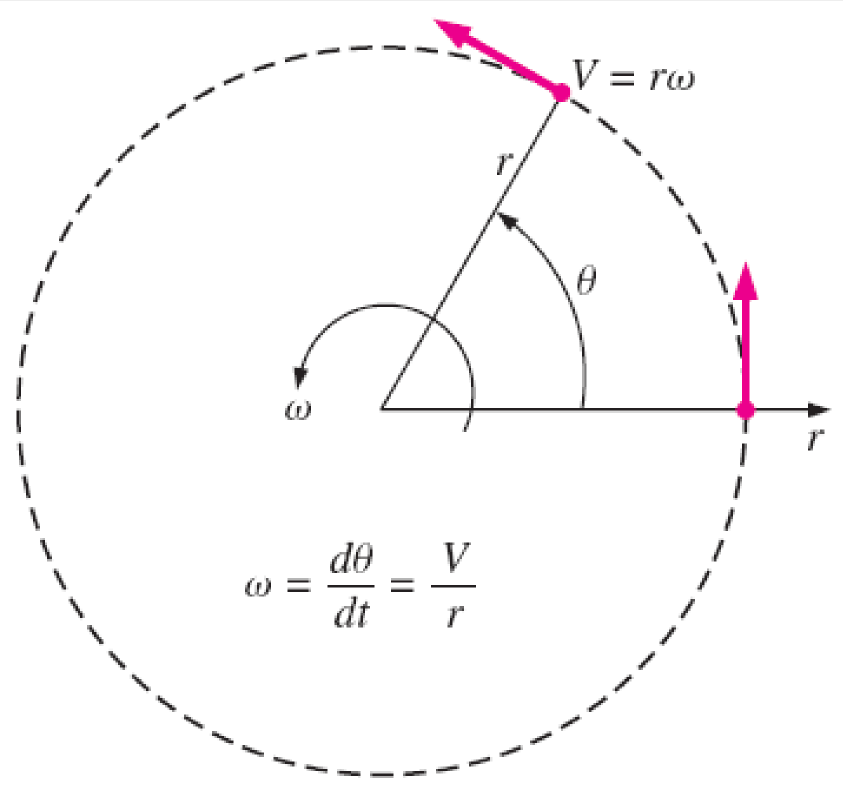
Açısal hız ω, birim zamanda alınan açısal mesafedir.

Açısal ivme α: Açısal hızın değişim hızıdır.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(l/r)}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dl}{dt} = \frac{V}{r}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{dV}{dt} = \frac{a_t}{r}$$

$$V = r\omega \qquad \text{and} \qquad a_t = r\alpha$$



Açısal mesafe θ, açısal hız ω ve doğrusal hız *V arasındaki ilişki.*

- Newton'un ikinci yasası, açısal ivmenin oluşması için teğetsel yönde bir kuvvetin varlığını gerektirir.
- **Moment** ya da **tork** olarak adlandırılan döndürme etkisinin şiddeti, kuvvetin büyüklüğü ve dönme ekseninden mesafe ile orantılıdır.
- Kuvvetin doğrultusu ile dönme ekseni arasındaki dik uzaklık **moment kolu** olarak adlandırılır.

$$M = rF_t = rma_t = mr^2\alpha$$

Tork

$$M = \int_{\text{mass}} r^2\alpha\, \delta m = \left[\int_{\text{mass}} r^2\, \delta m\right]\alpha = I\alpha$$

I, cismin dönmeye karşı eylemsizliğin bir ölçütü olan, dönme eksenine göre cismin **kütle atalet momenti**.

Kütlenin aksine bir cismin dönel eylemsizliğinin, cismin kütlesinin dönme eksenine göre dağılımına da bağlıdır.

Mass, m	$\longleftrightarrow$	Moment of inertia, I
Linear acceleration, $\vec{a}$	$\longleftrightarrow$	Angular acceleration, $\vec{\alpha}$
Linear velocity, $\vec{V}$	$\longleftrightarrow$	Angular velocity, $\vec{\omega}$
Linear momentum	$\longleftrightarrow$	Angular momentum
$m\vec{V}$	$\longleftrightarrow$	$I\vec{\omega}$
Force, $\vec{F}$	$\longleftrightarrow$	Torque, $\vec{M}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
Moment of force, $\vec{M}$	$\longleftrightarrow$	Moment of momentum, $\vec{H}$
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$

Doğrusal ve açısal büyüklükler arasındaki benzerlik.

$$H = \int_{\text{mass}} r^2\omega \,\delta m = \left[\int_{\text{mass}} r^2 \,\delta m\right]\omega = I\omega$$

Açısal momentum

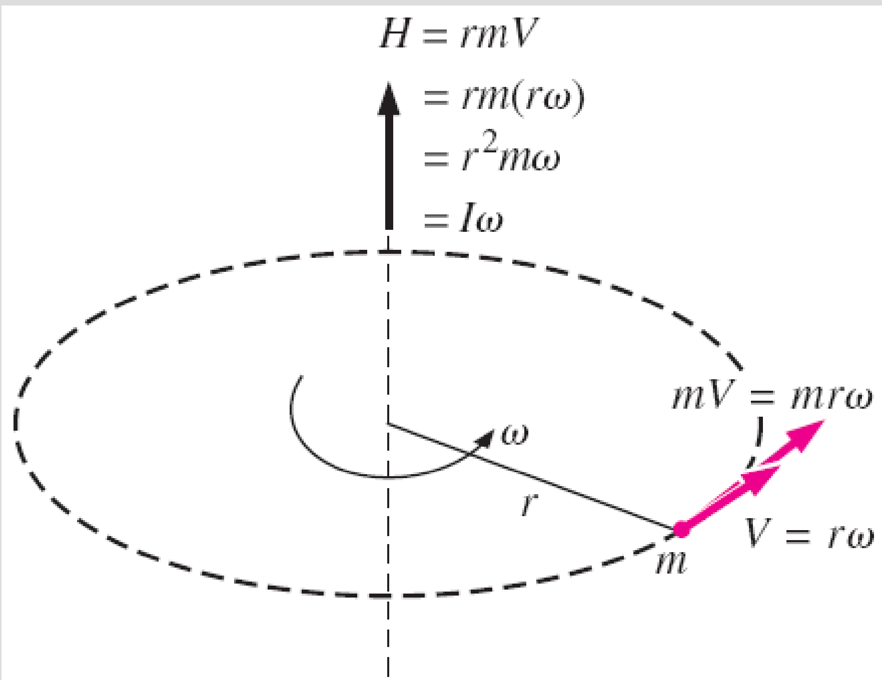
$$\vec{H} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

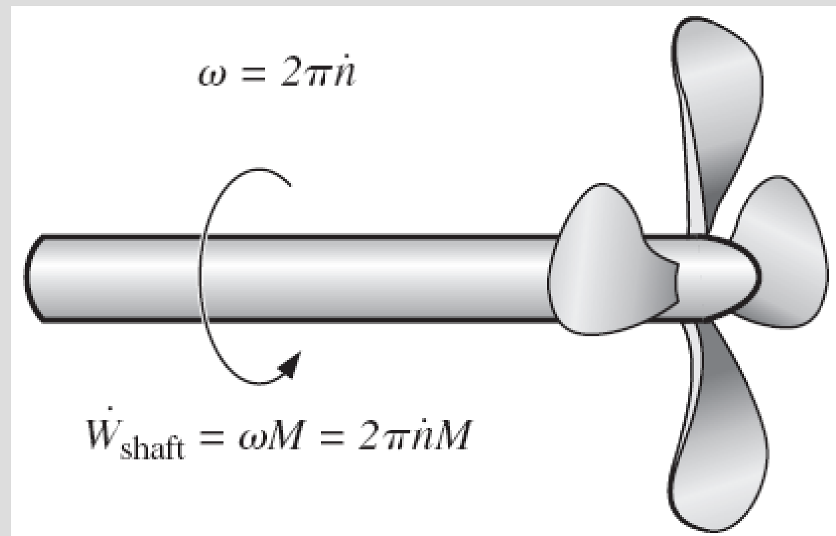
Açısal momentum denklemi

$$\omega = \frac{2\pi\dot{n}}{60} \qquad \text{(rad/s)}$$

Devir/Dakika'nın Açısal hız karşılığı



Dönme eksenine r mesafedeki, ω açısal hızı dönen bir m noktasal kütlesinin açısal momentumu.



devir/dakika (RPM) olarak açısal hız ve bir mil ile aktarılan güç arasındaki ilişkiler.

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = FV = Fr\omega = M\omega$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \omega M = 2\pi \dot{n} M \qquad \text{(W)}$$ Mil Gücü

$$\text{KE}_r = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$ Dönme kinetik enerjisi

Dönel harekette hızın şiddeti sabit kalsa da yönü sürekli olarak değişir. Hız vektörel bir büyüklüktür ve bu nedenle yöndeki bir değişim hızın da zamanla değişmesine yol açar ve bu da ivme meydana getirir.
Buna **merkezcil ivme** denir

$$a_r = \frac{V^2}{r} = r\omega^2$$

İvmenin, kuvvetin sabit bir çarpanı olduğu düşünülürse, merkezcil ivme; bir cisme dönme ekseni yönünde etkiyen ve **merkezcil kuvvet** olarak bilinen, büyüklüğü $F_r = m\,V^2/r$ olan bir kuvvetin sonucudur.

Teğetsel ve radyal ivmeler birbirlerine diktir (çünkü radyal ve teğetsel doğrultular birbirlerine diktir). Toplam doğrusal ivme ise bunların vektörel toplamı:

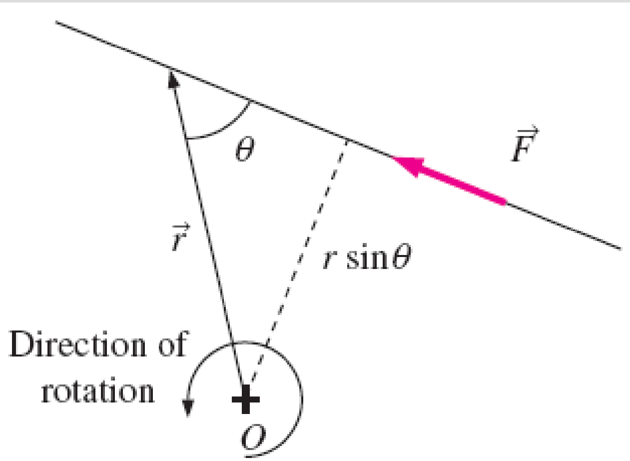
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

6–6 ■ AÇISAL MOMENTUM DENKLEMİ

Birçok mühendislik probleminde, akış akımlarının doğrusal momentumunun momenti ve bunların neden olduğu dönel etkiler söz konusudur.

Bu tür problemler en iyi şekilde momentum denkleminin momenti olarak da adlandırılan **açısal momentum denklemi** ile analiz edilebilir.

Akım makineleri içerisindeki en önemli grup olan ve içerisinde, merkezkaç pompaların, türbinlerin ve fanların da bulunduğu **türbo makinalar** en iyi şekilde açısal momentum denklemi ile analiz edilebilir.



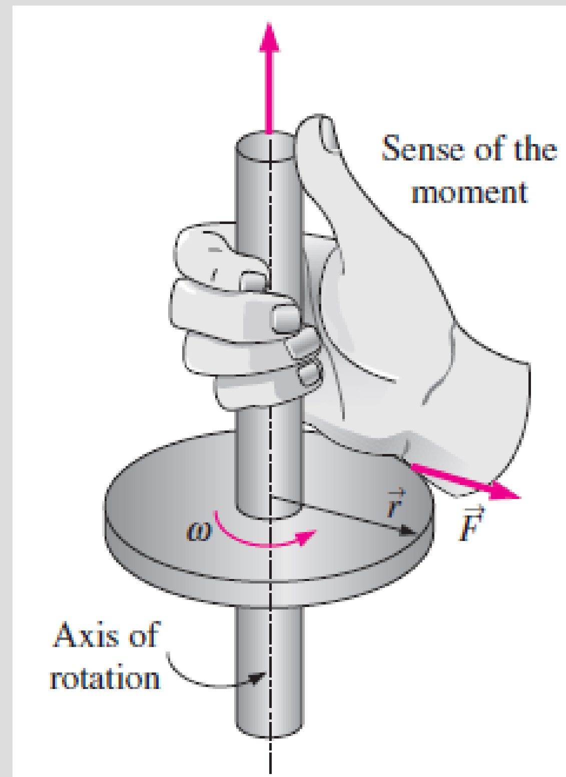
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = Fr\sin\theta$$

Bir $\vec{F}$ kuvvetinin bir O noktasına göre momenti; konum vektörü $\vec{r}$ ve $\vec{F}$ 'nin vektörel çarpımıdır.

Etki çizgisi O noktasından geçen bir kuvvetin O noktasına göre moment oluşturamaz.

sağ-el kuralı ile momentin yönünün belirlenmesi.



Momentumun momenti

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

Momentumun momenti (sistem)

$$\vec{H}_{sys} = \int_{sys} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV$$

Momentumun momentinin değişim hızı

$$\frac{d\vec{H}_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{sys} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV$$

Bir sistem için açısal momentum denklemi

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}_{sys}}{dt}$$

$$\sum \vec{M} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho b \, dV + \int_{CS} \rho b (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$$

$$B = \vec{H} \qquad b = \vec{r} \times \vec{V} \qquad b = \vec{r} \times \vec{V}$$

$$\frac{d\vec{H}_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$$

Açısal momentum denklemi, Reynolds transport teoreminde B yerine açısal momentum $\vec{H}$, b yerine ise birim kütle başına açısal momentum $\vec{r} \times \vec{V}$ yazılarak elde edilir.

$$\frac{d\vec{H}_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$$

General: $$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$$

(CV üzerine etkiyen tüm dış kuvvetlerin toplamı) = (CV içeriğinin açısal momentum değişim hızı) + (Kontrol yüzeyinden kütle ile çıkan net açısal momentum akış hızı)

Fixed CV: $$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Özel Durumlar

Daimi akış durumunda kontrol hacminin açısal momentumu sabit kalır, dolayısıyla kontrol hacminin açısal momentumunun zamanla değişimi sıfırdır.

Steady flow: $$\sum \vec{M} = \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

Giriş ve çıkıştaki ortalama özelliklere bağlı olarak açısal momentum denkleminin yaklaşık şekli:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \sum_{out} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{in} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Steady flow: $$\sum \vec{M} = \sum_{out} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{in} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Daimi akışta bir kontrol hacmine etkiyen net tork, çıkan ve giren açısal momentum akışı hızları arasındaki farka eşittir.

$$\sum M = \sum_{out} r\dot{m}V - \sum_{in} r\dot{m}V$$ *Açısal momentum denkleminin skaler formu*

Dış Momentlerin Bulunmadığı Akışlar

$$\textit{No external moments:} \qquad 0 = \frac{d\vec{H}_{CV}}{dt} + \sum_{out} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_{in} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V})$$

Dış momentlerin bulunmaması halinde kontrol hacminin açısal momentumunun değişim hızı; giren ve çıkan açısal momentum akıları arasındaki farka eşittir

Kontrol hacminin kütle atalet momenti *I* ‘nın sabit kalması durumunda en son denklemin ilk terimi, kütle atalet momenti ile açısal ivmenin çarpımına (*I*α) eşit olur. Dolayısıyla bu durumda kontrol hacmi katı bir cisim olarak ele alınabilir. Bu cismin üzerine etkiyen ve açısal momentumdaki değişiminden kaynaklanan net tork:

$$\vec{M}_{body} = I_{body}\vec{\alpha} = \sum_{in} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_{out} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V})$$

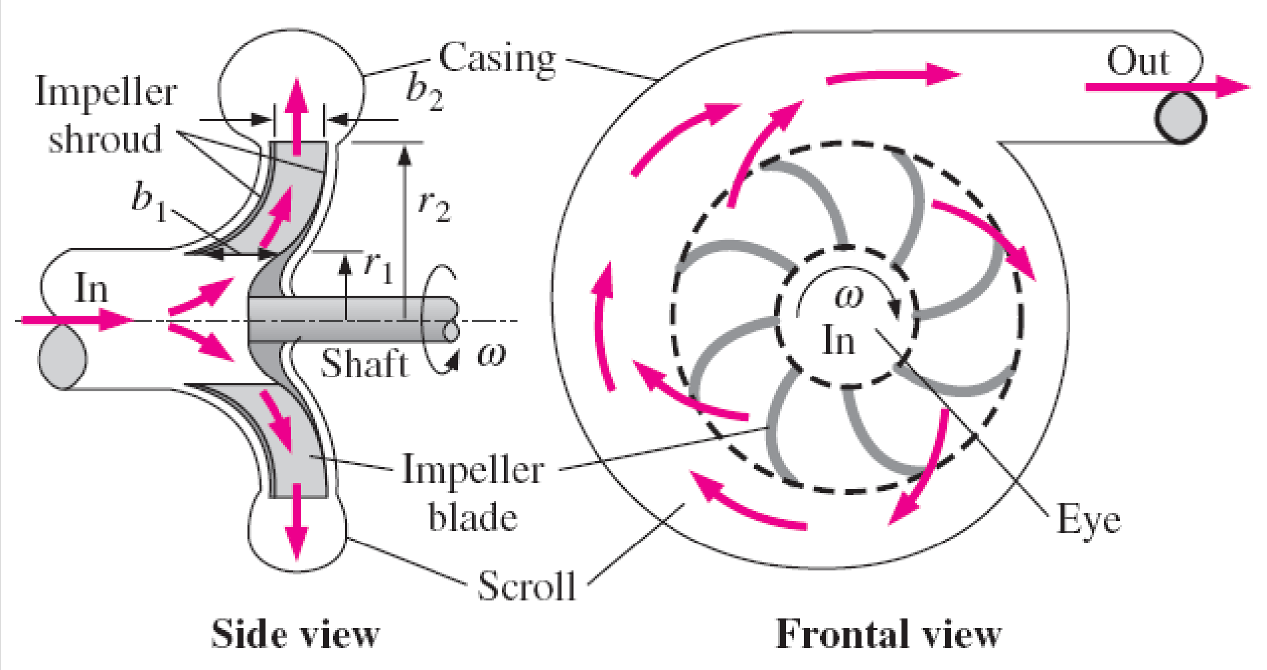
Bir roketin, mevcut hareketin yönünden farklı bir yönde ateşlenmesi halinde bu yaklaşım, uzay araçların ve uçağın açısal ivmesinin belirlenmesinde kullanılabilir.

Radyal-Akışlı Düzenekler

Radyal-akışlı düzenekler: Merkezkaç pompa ve fan gibi dönel akışlı makinelerin çoğunda, dönme eksenine dik olan radyal yönde akışlar görülür ve bunlar *radyal-akışlı düzenekler olarak adlandırılır.*

Eksenel-akışlı düzenekler doğrusal momentimi denklemi kullanılarak kolaylıkla analiz edilebilir.

Radyal-akışlı düzenekler, akışkanın açısal momentumunda büyük değişiklikler söz konusu olduğundan en iyi şekilde açısal momentum denklemi kullanılarak analiz edilebilir.



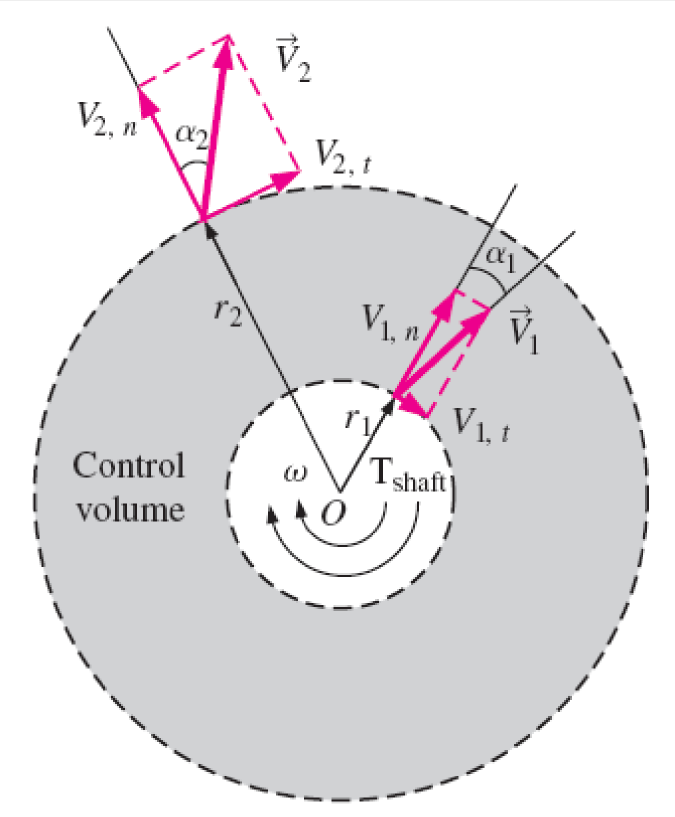
Tipik bir merkezkaç pompanın yandan ve önden görünüşü

Daimi sıkıştırılamaz akışta kütlenin korunumu kanunu

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} \qquad \rightarrow \qquad (2\pi r_1 b_1)V_{1,n} = (2\pi r_2 b_2)V_{2,n}$$

$$V_{1,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_1 b_1} \quad \text{and} \quad V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2}$$

$$\sum M = \sum_{\text{out}} r\dot{m}V - \sum_{\text{in}} r\dot{m}V$$ Açısal momentum denklemi



$$T_{shaft} = \dot{m}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t})$$ Euler'in türbin formülü

$$T_{shaft} = \dot{m}(r_2V_2 \sin\alpha_2 - r_1V_1 \sin\alpha_1)$$

When $V_{1,t} = \omega r_1$ $V_{2,t} = \omega r_2$

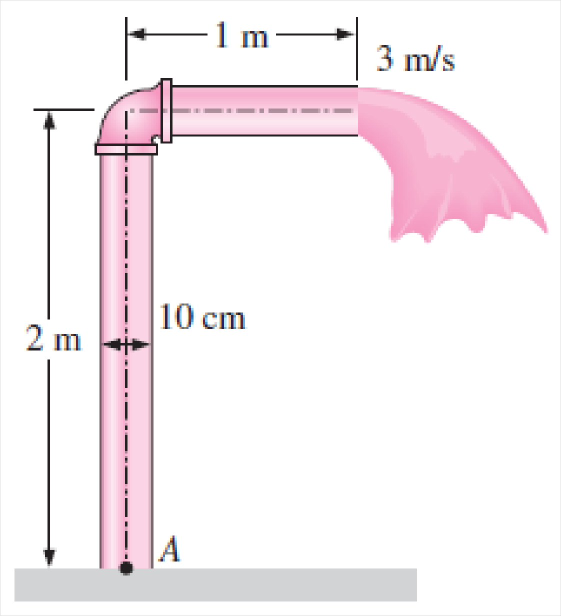
$$T_{shaft,\ ideal} = \dot{m}\omega(r_2^2 - r_1^2)$$

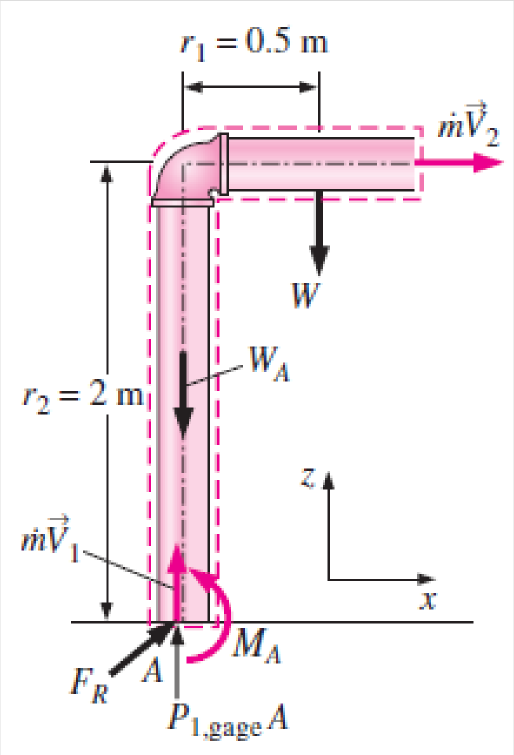
$$\dot{W}_{shaft} = \omega T_{shaft} = 2\pi\dot{n}T_{shaft} \qquad \omega = 2\pi\dot{n}$$

Bir merkezkaç pompanın çark bölümünü içerisine alan halka şeklindeki kontrol hacmi.

Örnek 6: Bir Su Borusunun Dip Kısmına Etkiyen Eğilme Momenti

Yeraltı suyu, şekilde gösterildiği gibi çapı 10 cm. düşey uzunluğu 2 m ve yatay uzunluğu 1 m olan bir boru içerisinden pompalanmaktadır. Su, ortalama 3 m/s hızla atmosferik şartlardaki havaya boşalmaktadır. Suya dolu yatay borunun bir metresinin kütlesi 12 kg'dır. Boru, beton temel ile zemine sabitlenmiştir. Borunun zemine bağlandığı (A noktası) eğilme momentini ve A noktasındaki momentin sıfır olması için yatay bölümün uzunluğunun ne olması gerektiğini belirleyiniz:





Analiz: L-şekiindeki borunun tamamını kontrol hacmi olarak alalım ve girişi 1, çıkışı ise 2 ile gösterelim. x- ve z-eksenlerini da şekilde gösterildiği gibi alalım. Kontrol hacmi ve I referans koordinat sistemi Bir-girişli ve bir-çıkışı olan bu daimi akış sisteminde A_c= sabit olduğu için,

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}, \text{ and } V_1 = V_2 = V$$

Akışın kütlesel debisi ve borunun.yatay bölümünün ağırlığı,

$$\dot{m} = \rho A_c V = (1000 \text{ kg/m}^3)[\pi(0.10 \text{ m})^2/4](3 \text{ m/s}) = 23.56 \text{ kg/s}$$

$$W = mg = (12 \text{ kg/m})(1 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 117.7 \text{ N}$$

olarak hesaplanabilir. A noktasında boruya etkiyen momentin belirlenebilmesi için bu noktaya göre tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının momentlerini almamız gerekir. Bu bir daimi-akış problemidir, ve tüm kuvvetler ve momentum akışları aynı düzlemdedir. Dolayısıyla açısal momentum denklemi,

$$\sum M = \sum_{\text{out}} r\dot{m}V - \sum_{\text{in}} r\dot{m}V$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde r, moment kolunun ortalama uzunluğu ye:v, ortalama hız olup saat yönün tersi yönde olan momentlerin hepsi pozitif ve saat yönündekilerin hepsi de negatiftir.

L-şeklindeki borunun serbest cisim diyagramı şekilde çizilmiştir. A noktasından geçen tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının momentinin sıfır olduğuna dikkat ediniz. A noktasına göre momentumu oluşturan tek kuvvet yatay boru bölümünün W ağırlığı ve A noktasına göre moment oluşturan tek momentum akışı ise çıkış akımıdır (her iki moment de saat yönünde olduğundan negatiftir). Bu durumda A noktasına göre açısal momentum denklemi:

$$M_A - r_1 W = -r_2 \dot{m} V_2$$

M_a aşağıdaki ifade ile belirlenir:

$$M_A = r_1 W - r_2 \dot{m} V_2$$
$$= (0.5 \text{ m})(118 \text{ N}) - (2 \text{ m})(23.56 \text{ kg/s})(3 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)$$
$$= \mathbf{-82.5 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

sonucunu elde ederiz. Negatif işaret, M_A için kabul edilen yönü yanlış olduğunu ve ters çevrilmesi gerektiğini göstermektedir. Dolayısıyla borunun gövdesine, saat dönüş yönünde 32.5 Nm 'lik değerinde bir moment etkimektedir. Bu da, beton temelin boru gövdesine çıkış akımı nedeniyle saat yönünde uygulanan=82,5 Nm momente karşı koyacak bir momentin uygulanmasını gerektirir.
Yatay borunun birim metre başına ağırlığı w=W/L=117.7 N/m'dir. Dolayısıyla L (m) uzunluğundaki bir borunun ağırlığı Lw ve moment kolu da r_1 = L/2'dir. Borunun gövdesindeki momentin ortadan kalkması için gerekli yatay boru uzunluğu M_a=0 yazılıp sayısal değerler yerine; konularak belirlenebilir:

$$0 = r_1 W - r_2 \dot{m} V_2 \quad \rightarrow \quad 0 = (L/2)Lw - r_2 \dot{m} V_2$$

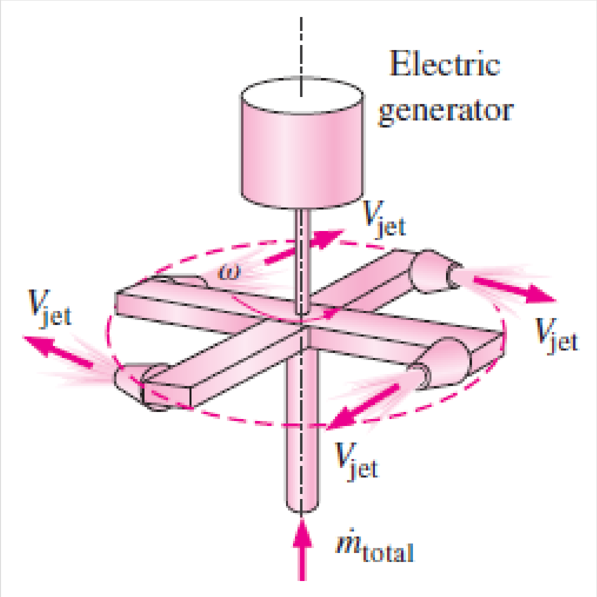
$$L = \sqrt{\frac{2 r_2 \dot{m} V_2}{w}} = \sqrt{\frac{2(2 \text{ m})(23.56 \text{ kg/s})(3 \text{ m/s})}{117.7 \text{ N/m}}\left(\frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}\right)} = \mathbf{1.55 \text{ m}}$$

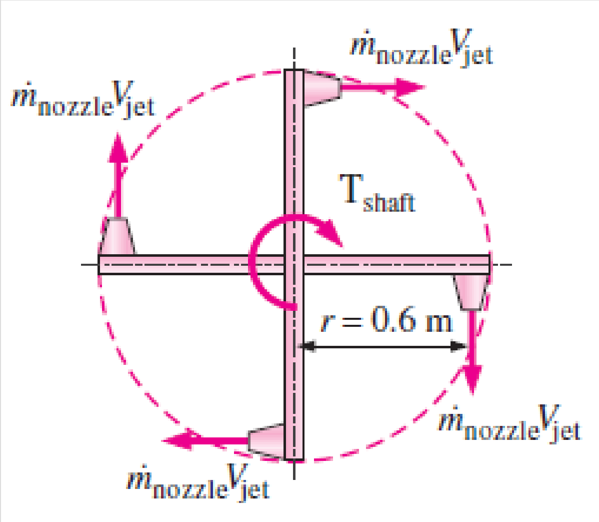
İrdeleme: Borunun ağırlığı ile çıkış akımının, A noktasında zıt yönde momente neden olduklarına dikkat ediniz. Bu örnek, dinamik bir analiz yapılırken ve kritik bir en-kesitte boru malzemesindeki gerilme hesaplanırken, akım momentumlarının momentlerinin iyi hesaplanmasının önemini göstermektedir.

Örnek 7: Bir Fıskiye Sisteminden Güç Üretimi

Şekilde gösterildiği gibi, dört özdeş kolu bulunan büyük bir çim fıskiyesi, dönmekte olan başlığına bir jeneratör bağlanarak elektrik üretmek üzere türbine dönüştürülmek istenmektedir. Su, fıskiyeye dönme ekseninden 20 L/s debi ile girmekte ve lüleleri teğetsel yönde terk etmektedir. Fıskiye yatay düzlemde 300 devir/dakika hızla dönmektedir. Her bir jetin çapı 1 cm ve yine, her bir lüle merkezinin dönme eksenine dik mesafesi 0.6m'dir. Buna göre üretilecek elektriksel gücü hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Dört kollu bir fıskiye, elektrik üretmek için kullanılmaktadır. Belirli bir debi ve dönme hızı için üretilecek gücün belirlenmesi istenmektedir.
Kabuller: 1) Akış döngüsel olarak daimidir (yani fıskiye kafası ile birlikte dönmekte olan koordinat sistemine göre daimidir). 2) Su atmosfere boşalmaktadır dolayısıyla lüle çıkışındaki etkin basınç sıfırdır. 3) Jeneratördeki kayıplar ile dönen parçalara havanın gösterdiği direnç ihmal edilmektedir. 4) Lüle çapı, moment kolu ile karşılaştırıldığında küçüktür dolayısıyla çıkışta ortalama çap ve ortalama hız değerleri kullanılabilir.
Özellikler: Suyun yoğunluğu 1000 kg/m^3 = 1 kg/L'dir.





Analiz: Fıskiyenin kollarını içine alan diski, sabit bir kontrol hacmi olarak seçelim. Bu daimi akışlı sistem için kütlenin korunumu denklemi $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_{total}$ şeklinde yazılabilir. Dört lülenin özdeş oldukları dikkate alınarak $\dot{m}_{nozzle} = \dot{m}_{total}/4$ veya suyun yoğunluğu sabit olduğu için $\dot{V}_{nozzle} = \dot{V}_{total}/4$ yazılabilir.
Jetin lüleye göre ortalama bağıl çıkış hızı:

$$V_{jet,r} = \frac{\dot{V}_{nozzle}}{A_{jet}} = \frac{5 \text{ L/s}}{[\pi(0.01 \text{ m})^2/4]}\left(\frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}}\right) = 63.66 \text{ m/s}$$

olur. Lülelerin açısal ve teğetsel hızları ise,

$$\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(300 \text{ rev/min})\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 31.42 \text{ rad/s}$$

$$V_{nozzle} = r\omega = (0.6 \text{ m})(31.42 \text{ rad/s}) = 18.85 \text{ m/s}V$$

olarak hesaplanabilir. Dolayısıyla su lüleden dışarıya atılırken, lüle de18.85m/s hızla zıt yönde hareket etmektedir. Buna göre su jetinin kontrol hacmine göre ortalama bağıl hızı (ya da yerdeki sabit bir noktaya göre bağıl hızı),

$$\vec{V}_{jet} = \vec{V}_{jet,r} + \vec{V}_{nozzle}$$

$$V_{jet} = V_{jet,r} - V_{nozzle} = 63.66 - 18.85 = 44.81 \text{ m/s}$$

olacaktır. Bunun bir döngüsel daimi akış problemi ve tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının aynı düzlemde olduğu göz önüne alınarak, açısal momentum denklemi $\sum M = \sum_{out} r\dot{m}V - \sum_{in} r\dot{m}V,$ şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadede r moment kolu olup saatin tersi yönündeki momentlerin tümü pozitif , saat yönündeki tüm momentler ise negatiftir.

Fıskiyenin kollarını da içine alan diskin serbest cisim diyagramı önceki slaytta gösterilmiştir. Dönme ekseninden geçen tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının momentlerinin sıfır olduğuna dikkat ediniz. Lüleleri terk eden su jetlerinin oluşturduğu momentum akışları saat yönünde moment üretir. Ayrıca jeneratörün kontrol hacmi- üzerindeki etkisi de saat yönünde bir momenttir. Dolayısıyla bu iki moment de negatiftir. Böylece dönme eksenine göre açısal momentum denklemi,

$$-T_{shaft} = -4r\dot{m}_{nozzle}V_{jet} \qquad \text{or} \qquad T_{shaft} = r\dot{m}_{total}V_{jet}$$

değerler yerine yazılırsa, mil tarafından aktarılan tork,

$$T_{shaft} = r\dot{m}_{total}V_{jet} = (0.6 \text{ m})(20 \text{ kg/s})(44.81 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}\right) = 537.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

olarak bulunur. Burada $\dot{m}_{total} = \rho\dot{V}_{total} = (1 \text{ kg/L})(20 \text{ L/s}) = 20 \text{ kg/s}.$ dikkat ediniz.

Dolayısıyla üretilen güç,

$$\dot{W} = 2\pi\dot{n}T_{shaft} = \omega T_{shaft} = (31.42 \text{ rad/s})(537.7 \text{ N} \cdot \text{m})\left(\frac{1 \text{ kW}}{1000 \text{ N} \cdot \text{m/s}}\right) = 16.9 \text{ kW}$$

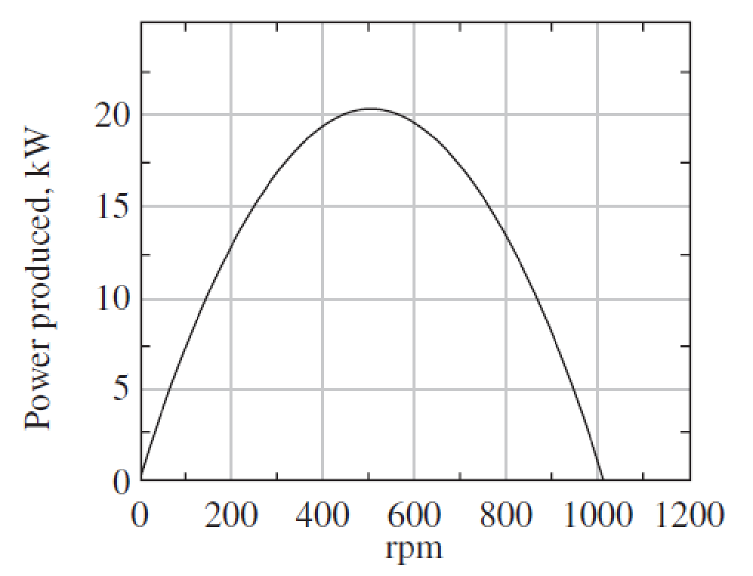
olarak hesaplanır. Başka bir ifadeyle, bu fıskiye tipi türbinin 16.9 kW güç üretme potansiyeli vardır.

İrdeleme: Elde edilen sonuç ağısından iki limit durumu göz önüne alalım. Bunlardan ilkinde fıskiye sabit ve dolayısıyla açısal hız sıfır olsun. Bu halde V_{nozzle}= 0 olacağı için oluşan tork maksimum olacaktır. Dolayısıyla V_{jet}=$V_{jet,r}$=0 alınarak $T_{shaft,max}$=764 Nm elde edilir. Ancak mil dönmediği için üretilen güç de sıfır olacaktır. İkinci halde ise, mil jeneratörden ayrılsın (dolayısıyla hem tork hem.de güç üretimi; sıfır olacaktır) ve mil bir denge hızına ulaşıncaya kadar ivmelensin. Açısal momentum denkleminde T_{shaft}=0 yazılırsa V_{jet}=0 ve dolayısıyla V_{jet}=V_{nozzle}=63.66m/s olur. Bu durumda fıskiyenin açısal hızı:

$$\dot{n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V_{\text{nozzle}}}{2\pi r} = \frac{63.66 \text{ m/s}}{2\pi(0.6 \text{ m})}\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = 1013 \text{ rpm}$$

olur. Bu devir sayısında jetin zemindeki gözlemciye göre (ya da seçilen disk şeklindeki sabit kontrol hacmine göre) bağıl hızı sıfır olacaktır.

Üretilen gücün açısal hız ile değişimi aşağıdaki şekilde çizilmiştir. Üretilen: gücün devir; sayısı ile artarak bir maksimum değere ulaştığına (bu örnek için 500 devir/dakika) ve ardından tekrar, azaldığına dikkat ediniz. Üretilen gerçek güç ise, jeneratördeki kayıplar nedeniyle daha az olacaktır (Bölüm 5).



Üretilen gücün açısal hız ile değişimi

Özet

- Newton'un Yasaları
- Kontrol Hacmi Seçimi
- Kontrol Hacmine Etkiyen Kuvvetlerin Bulunması
- Lineer Momentum Denklemi
  - ✓ Özel Durumlar
  - ✓ Momentum-Akısı Düzeltme Faktörü, β
  - ✓ Daimi Akış
  - ✓ Dış Kuvvetlerin Bulunmadığı Akış
- Dönümlü Hareketin ve Açısal Momentumun Gözden Geçirilmesi
- Açısal Momentum Denklemi
  - ✓ Özel Durumlar
  - ✓ Dış Momentlerin Bulunmadığı Akış
  - ✓ Radyal Akışlı Düzenekler