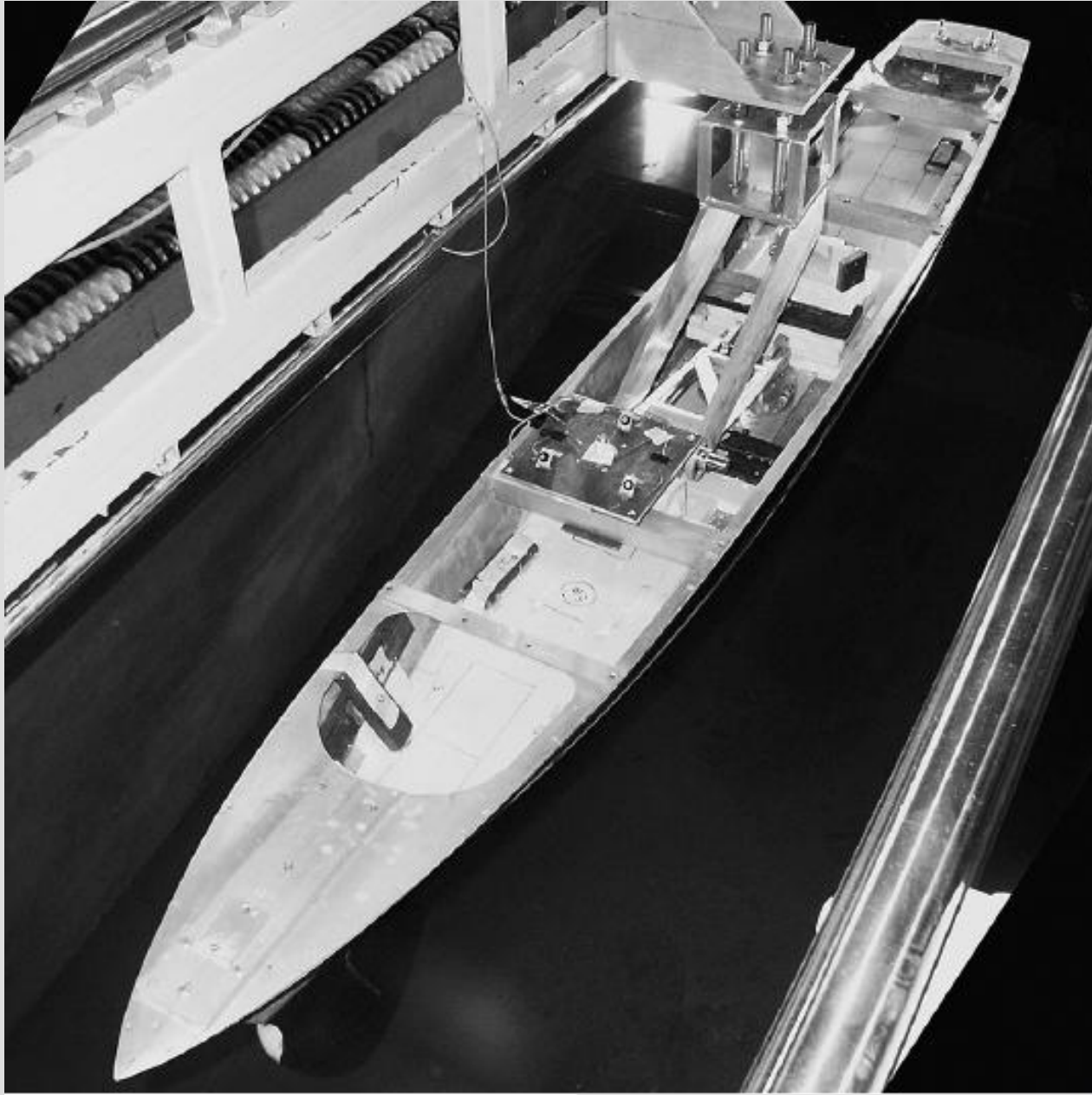


Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları, 2nd Edition  
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala  
McGraw-Hill, 2010

# **Bölüm 7**

## **BOYUT ANALİZİ VE MODELLEME**



Arleigh Burke sınıfı ABD deniz kuvvetleri destroyerinin 1:46.6 ölçekli modeli 100 m uzunluğundaki Iowa üniversitesi tankında test edilirken. Model 3.048 m uzunluktadır. Bu gibi testlerde, Froude sayısı en önemli boyutsuz parametredir.

# Amaçlar

- Boyutlar, birimler ve denklemlerdeki birimlerin homojenliğini daha iyi anlar hale gelmiş olabilmelisiniz.
- Boyut analizinin sayısız faydalarını anlayabilmelisiniz
- Boyutsuz parametreleri tanımlamak için tekrarlayan değişkenler yöntemini kullanıcağınızı bilebilmelisiniz
- Dinamik benzerlik kavramını ve deneysel modellemeye nasıl uygulayacağınızı anlayabilmelisiniz.

# 7-1 ■ BOYUTLAR VE BİRİMLER

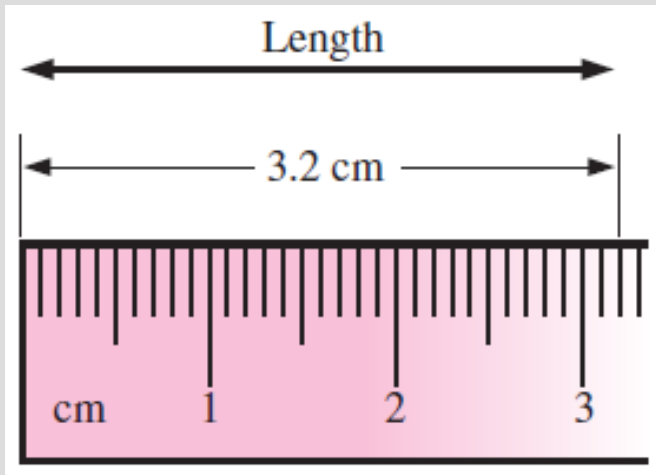
**Boyut:** Fiziksel miktarın bir ölçüsüdür (sayısal değerler olmadan).

**Birim:** Boyuta sayı atama yoludur.

Yedi ana boyut vardır (temel veya esas boyutlar da denir): Kütle, uzunluk, zaman, sıcaklık, elektrik akımı, ışık miktarı ve madde miktarı.

Ana boyutların dışında kalan tüm boyutlar, yedi ana boyutun bir birleşimi ile oluşturulabilir.

$$\text{Dimensions of force: } \{\text{Force}\} = \left\{ \text{Mass} \frac{\text{Length}}{\text{Time}^2} \right\} = \{mL/t^2\}$$



Boyut; sayısal değer olmaksızın fiziksel miktarın ölçüsüdür. Birim ise boyuta sayı atama yoludur. Örneğin, uzunluk bir boyuttur fakat santimetre bir birimdir.

## Primary dimensions and their associated primary SI and English units

---

Dimension	Symbol*	SI Unit	English Unit
Mass	m	kg (kilogram)	lbm (pound-mass)
Length	L	m (meter)	ft (foot)
Time <sup>†</sup>	t	s (second)	s (second)
Temperature	T	K (kelvin)	R (rankine)
Electric current	I	A (ampere)	A (ampere)
Amount of light	C	cd (candela)	cd (candela)
Amount of matter	N	mol (mole)	mol (mole)

---

## Örnek 1: Yüzey Geriliminin Ana Boyutları

Bir mühendis bazı böceklerin suda nasıl yürüyebildiklerini araştırıyor. Bu problemdeki önemli akışkan özelliği, boyutları birim uzunluk başına kuvvet olan yüzey gerilimidir ( $\sigma_s$ ). Yüzey geriliminin boyutlarını ana boyutlar cinsinden yazınız.

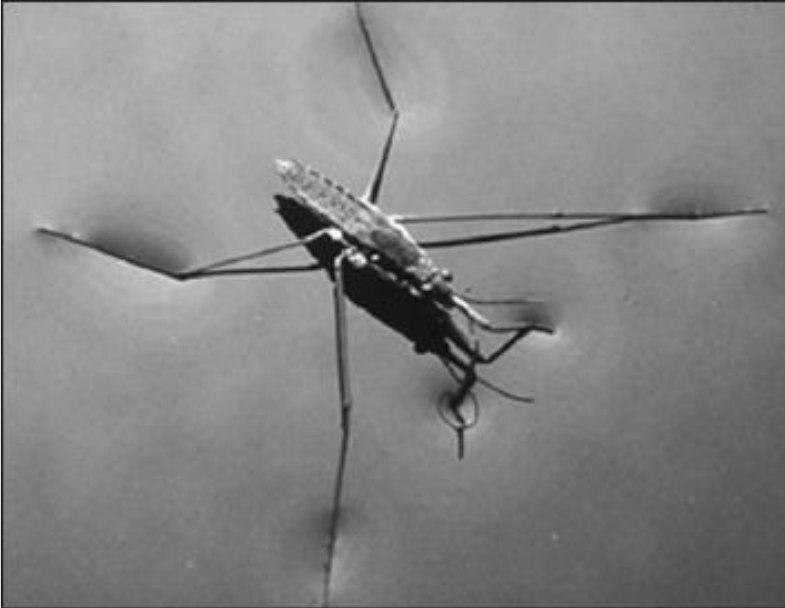
**ÇÖZÜM:** Yüzey geriliminin ana boyutları belirlenecektir.

**Analiz:** Kuvvetin boyutları kütle ile ivmenin çarpımıdır  $mL/t^2$ . Böylece

$$\text{Dimensions of surface tension: } \{\sigma_s\} = \left\{ \frac{\text{Force}}{\text{Length}} \right\} = \left\{ \frac{m \cdot L/t^2}{L} \right\} = \{m/t^2\} \quad (1)$$

elde edilir.

**İrdeleme:** Bir değişken veya sabitin boyutlarını ana boyutlar cinsinden göstermenin faydası, tekrarlayan değişkenler yönteminin ele alınacağı Kısım 7-4'te daha anlaşılır hale gelecektir.



Suda yürüyen böcek bunu yüzey gerilimini kullanarak yapabilmektedir.

# 7-2 ■ BOYUTSAL HOMOJENLİK

**Boyutsal homojenlik yasası:** Bir denklemde toplanan bütün terimlerin boyutları aynı olmalıdır.

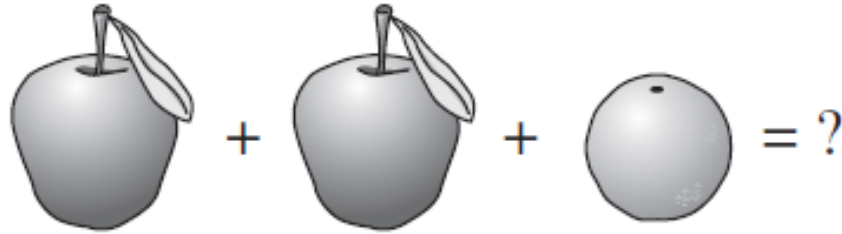
*Change of total energy of a system:*

$$\Delta E = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE$$

$$\Delta U = m(u_2 - u_1) \quad \text{İç Enerji}$$

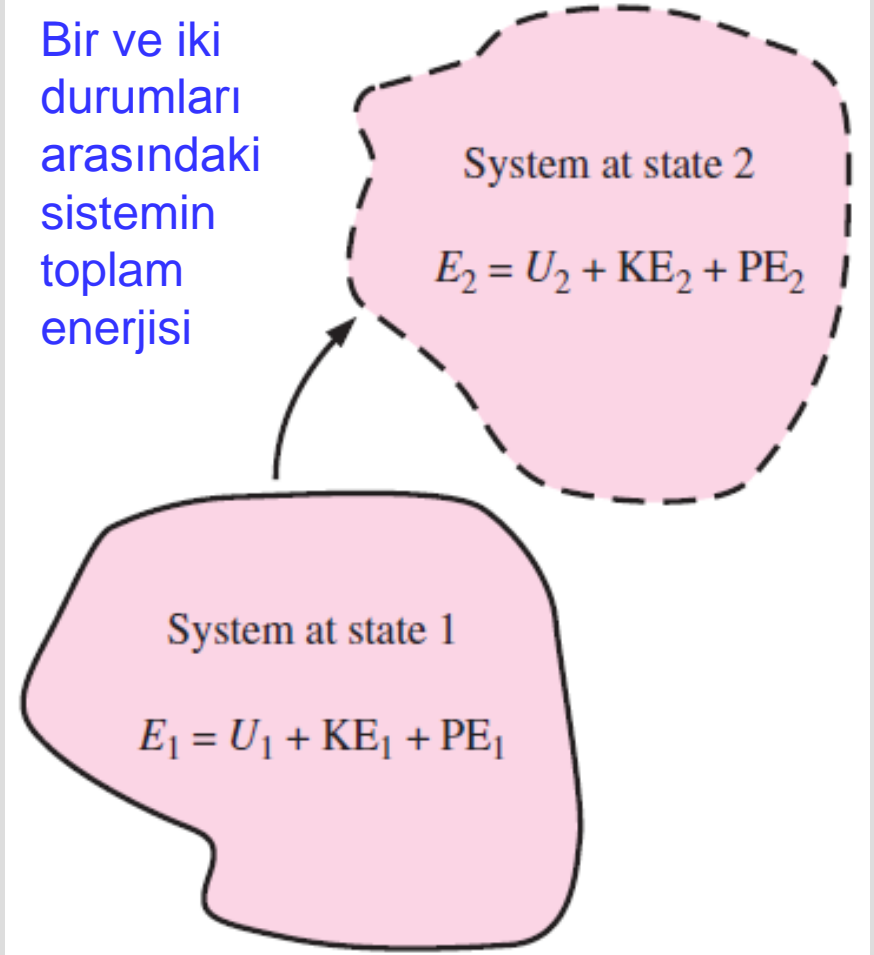
$$\Delta KE = \frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2) \quad \text{Kinetik Enerji}$$

$$\Delta PE = mg(z_2 - z_1) \quad \text{Potansiyel Enerji}$$



Elmalarla portakalları toplayamazsınız

Bir ve iki durumları arasındaki sistemin toplam enerjisi



$$\{\Delta E\} = \{\text{Energy}\} = \{\text{Force} \cdot \text{Length}\} \rightarrow \{\Delta E\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta U\} = \left\{ \text{Mass} \frac{\text{Energy}}{\text{Mass}} \right\} = \{\text{Energy}\} \rightarrow \{\Delta U\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta KE\} = \left\{ \text{Mass} \frac{\text{Length}^2}{\text{Time}^2} \right\} \rightarrow \{\Delta KE\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta PE\} = \left\{ \text{Mass} \frac{\text{Length}}{\text{Time}^2} \text{Length} \right\} \rightarrow \{\Delta PE\} = \{mL^2/t^2\}$$

CAUTION!

WATCHOUT FOR  
NONHOMOGENEOUS  
EQUATIONS

Boyutsal olarak homojen olmayan bir denklem kesinlikle hata yapıldığının işaretidir.



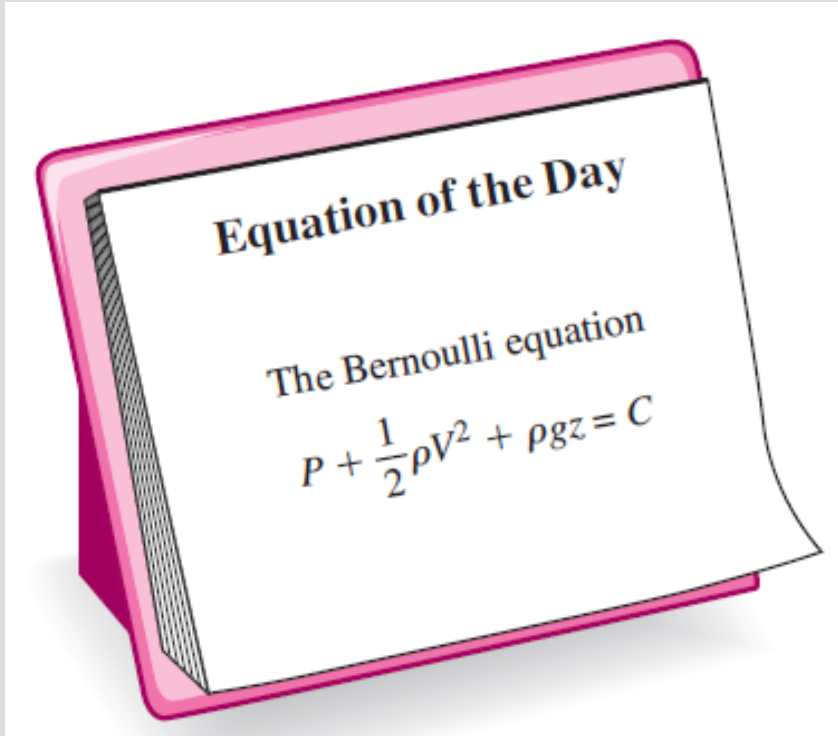
## Örnek 2: Bernoulli Denkleminin Boyutsal Homojenliği

Akışkanlar mekaniğinde belki en iyi bilinen (aynı zamanda en fazla yanlış kullanılan) denklem, Bölüm 5' te anlatılan Bernoulli denklemidir. Sıkıştırılmaz dönümsüz akış için Bernoulli denkleminin standart formu şöyledir:

$$\text{Bernoulli Denklemi: } P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gz = C \quad (1)$$

(a) Bernoulli denkleminde toplam halinde olan her bir terimin aynı boyutta olduğunu doğrulayınız. (b)  $C$  sabitinin boyutları nelerdir?

**ÇÖZÜM** Denklem 1'de toplam halinde olan her bir terimin ana boyutlarının aynı olduğunu kanıtlayacağız ve  $C$  sabitinin boyutlarını belirleyeceğiz. '



Bernoulli denklemi, boyutsal olarak homojen olan olmak üzere denkleme iyi bir örnektir. Sabitler dahil toplanan tüm terimlerin boyutları aynı olup, hepsi basınç cinsindedir. Ana boyutlar cinsinden her terimin boyutu  $\{m/(t^2L)\}$ 'dir.

(a) Her bir terim ana boyutlar cinsinden yazılır:

$$\{P\} = \{\text{Pressure}\} = \left\{ \frac{\text{Force}}{\text{Area}} \right\} = \left\{ \text{Mass} \frac{\text{Length}}{\text{Time}^2} \frac{1}{\text{Length}^2} \right\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$$
$$\left\{ \frac{1}{2} \rho V^2 \right\} = \left\{ \frac{\text{Mass}}{\text{Volume}} \left( \frac{\text{Length}}{\text{Time}} \right)^2 \right\} = \left\{ \frac{\text{Mass} \times \text{Length}^2}{\text{Length}^3 \times \text{Time}^2} \right\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$$
$$\{\rho g z\} = \left\{ \frac{\text{Mass}}{\text{Volume}} \frac{\text{Length}}{\text{Time}^2} \text{Length} \right\} = \left\{ \frac{\text{Mass} \times \text{Length}^2}{\text{Length}^3 \times \text{Time}^2} \right\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$$

Gerçekten toplam halinde olan terimlerin üçü de aynı boyuttadır.

b) Homojenlik yasasının gereği sabit, denklemde toplam halinde olan tüm terimlerde aynı boyutta olmalıdır. Böylece,

$$\{C\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$$

olur.

**İrdeleme:** Eğer terimlerden birinin bile boyutu diğerlerinininkinden farklı olursa analizde bir yerlerde yanlışlık yapılmış demektir.

# Denklemlerin Boyutsuzlaştırması

**Boyutsuz denklem:** Denklemdaki her bir terim, çarpımları denklemdaki terimlerle aynı boyuta sahip bir değişken ve sabitler grubu ile bölünürse denklem **boyutsuz** hale getirilmiş olur.

**Normalleştirilmiş denklem:** Eğer bunun yanında denklemdaki boyutsuz terimler 1 mertebesinde ise denklem normalleştirilmiş olarak adlandırılır.

**Boyutsuzlaştırılmış denklemdaki her bir terim boyutsuzdur.**

**Boyutsuz parametreler:** Hareket denklemini boyutsuzlaştırma işleminde, çoğunlukla boyutsuz parametreler ortaya çıkar. Bunların çoğu, adını önemli bir bilim inşam veya mühendisten almıştır (Reynolds sayısı ve Froude sayısı vb.).

Bu boyutsuzlaştırma işlemi bazı yazarlar tarafından **denetlemeli analiz** olarak tabir edilir.

The nondimensionalized Bernoulli equation

$$\frac{P}{P_{\infty}} + \frac{\rho V^2}{2P_{\infty}} + \frac{\rho g z}{P_{\infty}} = \frac{C}{P_{\infty}}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{1\} \end{array}$$

Bernoulli boyutsuzlaştırılmış formu, denklemden toplam halinde bulunan her bir terimin basınca ( $P_{\infty}$ ) bölünmesiyle elde edilir. Ortaya çıkan her bir terim boyutsuzdur (boyutu {1} 'dir)

Equation of motion:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Dimensional result:

$$z = z_0 + w_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

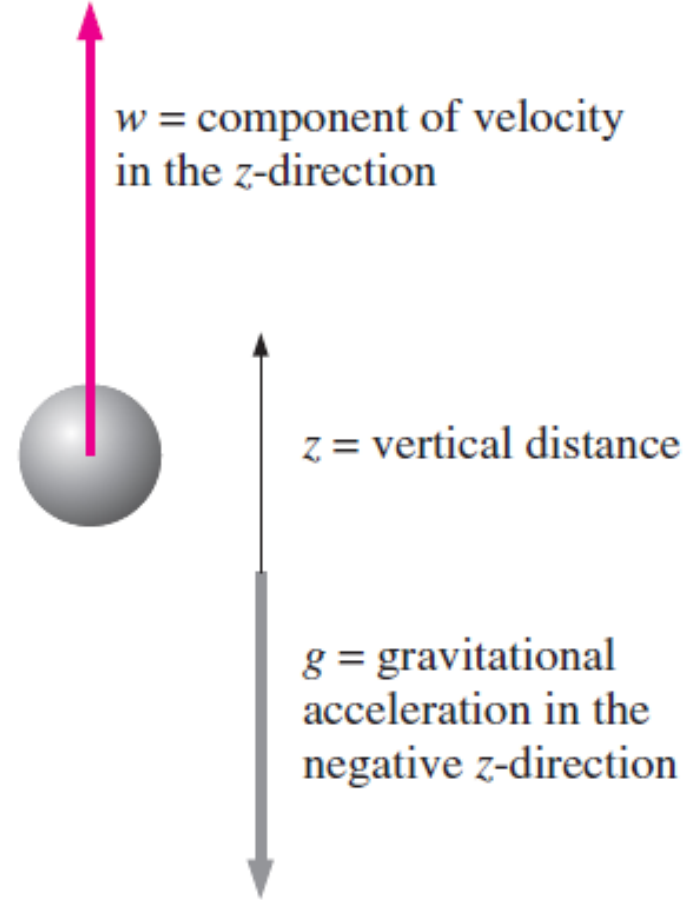
**Boyutlu değişkenler:** Bir problemde değişen veya dönüşen boyutlu niceliklerdir. Örneğin:  $z$  (uzunluk boyutu) ve  $t$  (zaman boyutu).

**Boyutsuz değişkenler:** Bir problemde değişen fakat boyutu olmayan nicelikler olarak tanımlanır. Buna örnek olarak **dönme açısı** verilebilir.

**Boyutlu sabit:** Yerçekimi sabiti  $g$  boyutlu olmakla birlikte sabit kalır ve boyutlu sabit olarak isimlendirilir.

**Parametreler:** Problemdeki boyutlu değişkenler, boyutsuz değişkenler ve boyutlu sabitlerin birleşik grubu için parametre terimi kullanılır.

**Saf sabitler:** Yukarı denklemdeki  $1/2$  sabiti ve  $2$  üssü integral işleminden gelen boyutsuz sonuçlardır. Diğer yaygın örnekler,  $\pi$  ve  $e$  'dir.



Boşlukta düşen bir cisim. Düşey hız pozitif olarak çizilmiştir, dolayısıyla düşen cisim için  $w < 0$ 'dır

Herhangi bir denklemi boyutsuzlaştırmak için, asıl denklemde bulunan ana boyutlara dayanan **ölçeklendirme parametrelerini** seçmemiz gerekir.

*Primary dimensions of all parameters:*

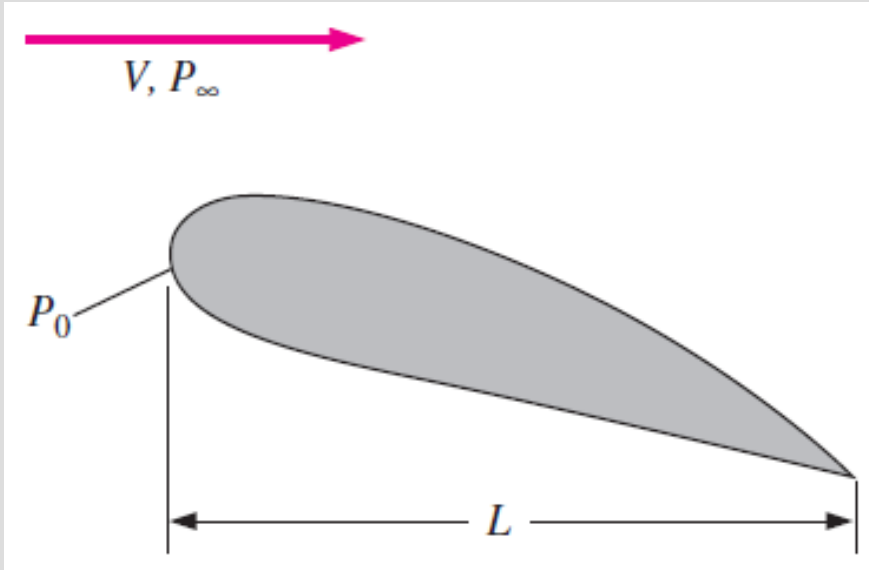
$$\{z\} = \{L\} \quad \{t\} = \{t\} \quad \{z_0\} = \{L\} \quad \{w_0\} = \{L/t\} \quad \{g\} = \{L/t^2\}$$

*Nondimensionalized variables:*

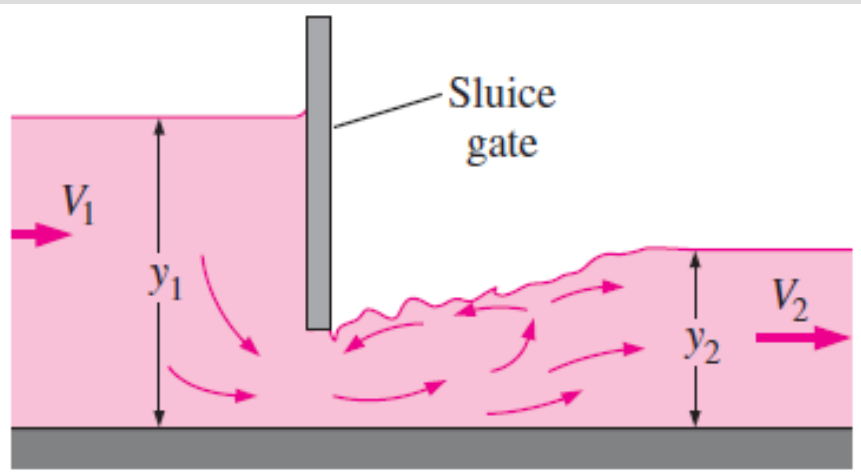
$$z^* = \frac{z}{z_0} \quad t^* = \frac{w_0 t}{z_0}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2(z_0 z^*)}{d(z_0 t^*/w_0)^2} = \frac{w_0^2}{z_0} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -g \quad \rightarrow \quad \frac{w_0^2}{g z_0} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -1 \quad \text{Fr} = \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}} \quad \text{Froude sayısı}$$

**Atalet kuvvetlerinin yerçekimi kuvvetlerine olan oranı**



Tipik bir akış probleminde **ölçeklendirme parametreleri**; karakteristik uzunluk  $L$ , karakteristik hız  $V$  ve referans basınç farkı  $P_0 - P_\infty$ 'dur. Yoğunluk, viskozite ve ivmesi yerçekimi gibi diğer parametreler ve akışkan özellikleri de probleme dahil olur.



*Froude sayısı* açık kanallarda olduğu gibi serbest-yüzeyle akışlarda da önemlidir. Burada bir dip savağından olan akış gösterilmiştir. Dip savağıının yukarıdaki Froude sayısı  $Fr_1 = V_1 / \sqrt{gy_1}$ , aşağıdaki ise  $Fr_2 = V_2 / \sqrt{gy_2}$ 'dir.

*Nondimensionalized equation of motion:*

$$\frac{d^2z^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{Fr^2}$$

*Nondimensional result:*

$$z^* = 1 + t^* - \frac{1}{2Fr^2} t^{*2}$$

Problemde önemli parametreler arasındaki ilişkiler tespit edilir.

Boyutsuzlaştırılmış denklemdeki parametre sayısı, asıl denklemdeki parametre sayısından azdır.

### Örnek 3: Boyutsuzlaştırmanın Yararları

Küçük erkek kardeşiniz ve arkadaşları, lisedeki fizik derslerinde bir deney yapıyorlar. Deneyde içi boşluk şartlarında tutulan büyük düşey bir boru kullanılıyor. Öğrenciler çelik bir bilyeyi uzaktan kurnanda ile bırakabiliyorlar. Bilyenin İlk bırakılma yüksekliği  $z_0$  0 ile 15 m arasındadır (borunun alt kısmından itibaren ölçülmektedir) ve başlangıçtaki düşey hızı  $w_0$  0 ile 10 m/s arasındadır. Öğrenciler boru boyunca yerleştirilen fotosensör ağına bağlı bilgisayar yardımı ile çelik bilyenin yörüngesini ( $z$  yüksekliği  $f$  zamanının fonksiyonu olarak çizilmiştir) her bir test için grafik üzerine aktarabilmektedirler; Öğrenciler boyut analizi veya boyutsuzlaştırma tekniklerine alışkın olmadıklarından; yörüngenin  $z_0$  ve  $w_0$  başlangıç şartlarından nasıl etkilendiğini bulmak için birkaç tane "kaba kuvvet" deneyi yapıyorlar, ilk önce  $w_0$ 'ı 4 m/s'de sabit tutup, 5 değişik  $z_0$  değeri: 3, 6, 9,12 ve 15 m için deney yapıyorlar. Deney sonuçları bir sonraki slayttaki şekillerde gösterilmiştir. Sonra da,  $z_0$ 'ı 10 m 'de sabit tutarak ve 5 değişik  $w_0$  değeri: 2,4,6, 8 ve 10 m/s için deney yapıyorlar. Bu sonuçlar Şekil 7-2fi'de gösterilmiştir. O akşam erkek kardeşiniz verileri ve yörünge şekillerini size gösterir ve yarın değişik  $z_0$  ve  $m$  değerleri için daha çok deney yapacaklarını anlatır. Siz de önce verileri boyutsuzlaştırarak; problemin sadece bir parametreye indirgenebileceğini ve daha fazla deney-yapmaya gerek kalmayacağını açıklıyorsunuz. Görüşünüzü ispatlamak için boyutsuz bir grafik çiziniz ve tartışınız.

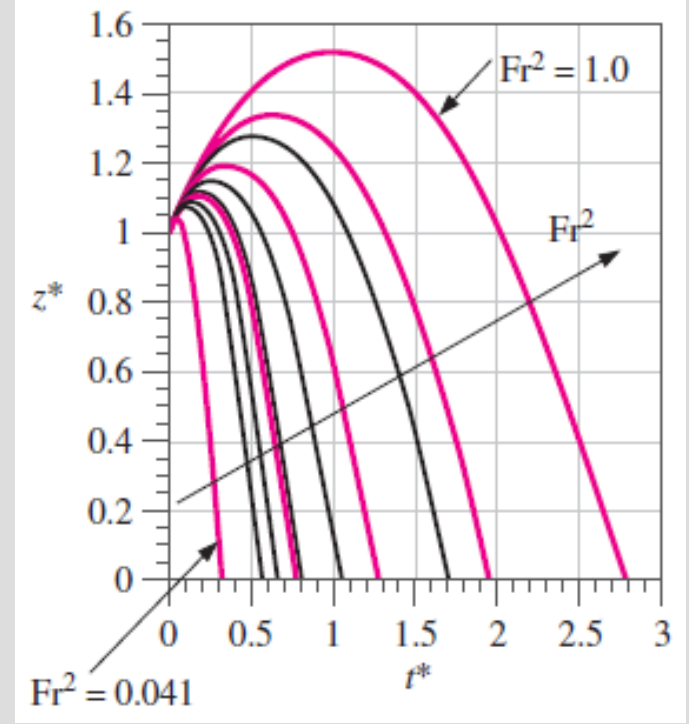
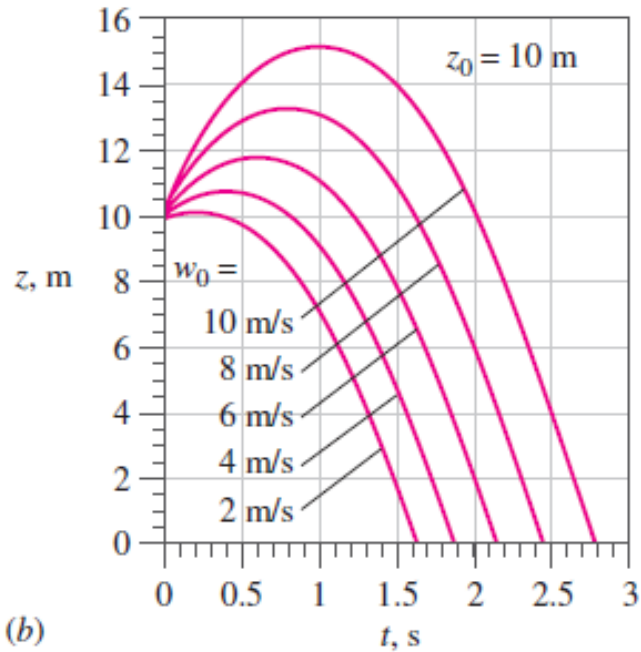
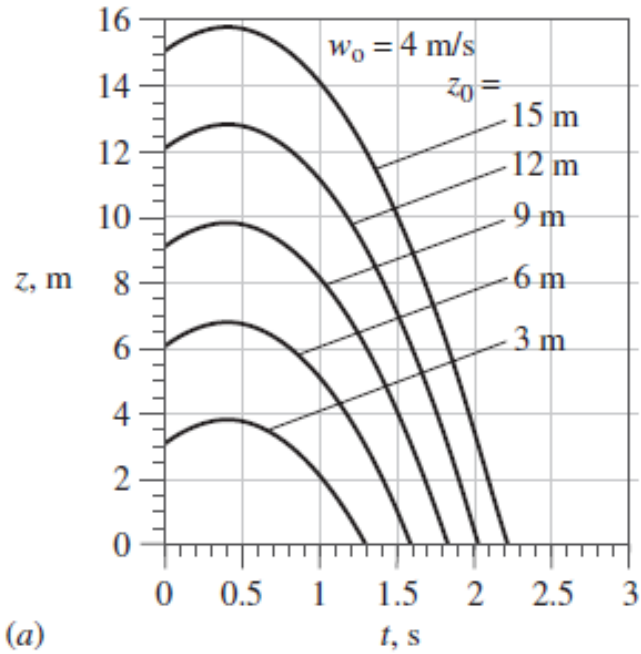
**Kabuller :** Borunun içi, bilye üzerindeki aerodinamik direnç ihmal edilebilecek kadar güçlü boşluk (vakum) basıncına tabi tutulmaktadır.

**Özellikler:** Yerçekimi sabiti  $9.81 \text{ m/s}^2$ 'dir.

**Analiz:** Bu problem için boyutsuzlaştırılmış biçimi Denklem 7-9 ile verilen, Denklem 7-4 geçerlidir. Daha önce tartışıldığı gibi, bu problemdeki üç tane boyutlu asıl-parametre ;  $\{g, z_0 \text{ ve } w_0\}$  bir taneboyutsuz parametre,(Froude sayısı) altında birleştirilir. Şekil 7-12a i ve ffde gösterilen 10 adet yörünge, Denklem: 7-B'nin boyutsuz; değişkenleri haline : dönüştürüldükten sonra boyutsuz olarak Şekil 7-13'te tekrar çizilmiştir; Bütün yörüngelerin aynı aileden olduğu ve geriye kalan tek parametrenin Froude sayısı olduğu açıkça görülmektedir. Bu deneylerde  $Fr$ , 0.041 civarından 1 civarına kadar değişir. Daha fazla sayıda deneye gerek kalmamaktadır, çünkü bütün yörüngeler Şekil 7—13'te çizildiği gibi aynı ailedendir.

**İrdeleme:** Düşük Froude sayılarında yerçekim kuvvetleri atalet kuvvetlerinden çok daha büyüktür ve bilye zemine göreceli olarak daha kısa zamanda düşer. Yüksek  $Fr$  sayılarında ise önce atalet kuvvetleri baskın çıkar ve bilye, düşmeden önce önemli bir miktar yükselir; yere çarpması daha uzun zaman alır. Açıkça görüldüğü gibi öğrenciler yerçekimi sabitini değiştiremezler.





Boşlukta düşen çelik bilyenin yörüngeleri. Şekil 7-12 a ve b'deki veriler boyutsuzlaştırılmış ve bir grafik üzerinde birleştirilmiştir.

Boşlukta düşen çelik bilyenin yörüngeleri: (a)  $w_0$  4 m/s de sabit tutulmuş ve (b)  $z_0$  10 m de sabit tutulmuştur.



## Örnek 4: Boyutsuzlaştırılmış Verilerin Ekstrapolasyonu

Ay yüzeyindeki çekimi sabiti, dünyanıninkinin sadece altıda biri civarındadır. Ay 'da bulunan bir astronot elindeki topu ay yüzeyinin 2m yukarisından, yatayla  $5^\circ$  açi yapacak şekilde 21.0 m/s'lik ilk hızla fırlatmaktadır.

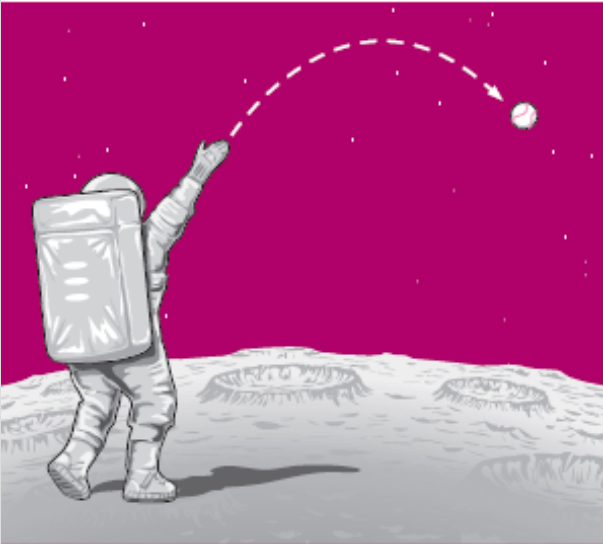
(a) Şekil 7-13'te gösterilen örnek 3 'e ait boyutsuz verileri kullanarak topun ne kadar süre sonra zemine düşeceğini hesaplayınız. (b) Sonucu tam olarak hesaplayınız ve (a) şikkındaki sonuçla karşılaştırınız.

**ÇÖZÜM:** Topun ay zeminine düşmesi için gereken süreyi hesaplamak için dünyada elde edilen deneysel veriler kullanılacaktır.

**Kabuller:** 1) Topun yatay hızı önemsizdir. 2) Astronotun etrafındaki ay yüzeyi tamamen düzdür, 3) Ayda, atmosfer olmadığından top üzerinde aerodinamik direnç yoktur 4) Ayın yer çekim ivmesi dünyanıninkinin altıda biridir.

**Özellikler:** Ayın çekim sabiti  $g_{\text{moon}} = 9.81/6 = 1.63 \text{ m/s}^2$ 'dir.

*Analiz (a)  $g_{\text{moon}}$  değerine ve ilk hızın düşey bileşenine dayanarak Froude sayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:*



$$w_0 = (21.0 \text{ m/s}) \sin(5^\circ) = 1.830 \text{ m/s}$$

$$Fr^2 = \frac{w_0^2}{g_{\text{moon}} z_0} = \frac{(1.830 \text{ m/s})^2}{(1.63 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m})} = 1.03$$

Bir topun ayda fırlatılışı

$F_r$  nin bu değeri Şekil 7.13'de çizilen en büyük değerler hemen hemen aynıdır. Şekil 7-13'ten belirleneceği üzere, boyutsuz değişkenler cinsinden top zemine  $t^* = 2.75$ 'te çarpar. Denklem 7-6'yı kullanarak boyutlu değişkenlere çevirirsek, zemine çarpması için geçen süre

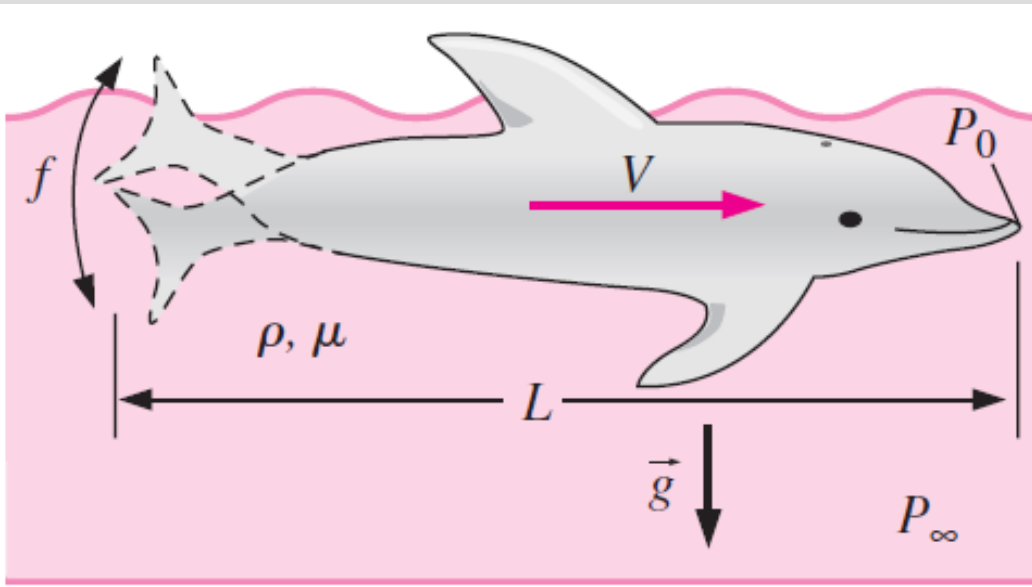
$$t = \frac{t^* z_0}{w_0} = \frac{2.75(2.0 \text{ m})}{1.830 \text{ m/s}} = 3.01 \text{ s}$$

olarak bulunur.

(b) Tam hesaplama, Denklem 7-5 'te  $z$  'yi sıfıra eşitlemekle ve  $t$  'yi bulmakla elde edilir: (ikinci dereceden denklemi kullanarak, zemine çarpması için geçen tam süre:

$$t = \frac{w_0 + \sqrt{w_0^2 + 2z_0 g}}{g}$$
$$= \frac{1.830 \text{ m/s} + \sqrt{(1.830 \text{ m/s})^2 + 2(2.0 \text{ m})(1.63 \text{ m/s}^2)}}{1.63 \text{ m/s}^2} = 3.05 \text{ s}$$

**İrdeleme:** Eğer  $F_r$  sayısı Şekil 7.13'teki yörüngelerden ikisinin arasında kalmış olsaydı, Bu durumda interpolasyon yapmamız gerekirdi. Sayılardan bazıları yalnızca iki anlamlı basamağa göre verildiğinden, (a) ve (b) şıklarındaki sonuçlar arasındaki küçük fark önemsizdir. Nihai sonuç iki anlamlı basamağa göre  $t=3.0$  s'dir.



$$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

$$St = \frac{fL}{V}$$

$$Eu = \frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2}$$

Genel daimi olmayan bir akış probleminde ölçeklendirme parametreleri; karakteristik uzunluk  $L$ , karakteristik hız  $V$ , karakteristik frekans  $\omega$  ve referans basınç farkı  $P_0 - P_\infty$  olarak sıralanır. **Akışa ait diferansiyel denklemlerin boyutsuzlaştırılması, ortaya dört boyutsuz parametre çıkarır: Reynolds sayısı, Froude sayısı, Strouhal sayısı ve Euler sayısı** (bkz. Bölüm 10)

## 7-3 ■ BOYUT ANALİZİ VE BENZERLİK

Çoğu deneylerde zamandan ve paradan tasarruf etmek için, testler tam ölçekli **prototip yerine, geometrik olarak ölçeklendirilmiş bir model** üzerinde gerçekleştirilir. Böyle durumlarda sonuçları uygun bir şekilde ölçeklendirmek için özen göstermek gerekir. Burada güçlü bir teknik olan **boyut analizini** tanıtacağız.

### Boyut analizinin üç ana amacı aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Deneyleri tasarlamada (fiziksel ve/veya sayısal) ve deney sonuçlarının raporlamada yardımcı olacak boyutsuz parametreleri oluşturmak
- Model performansından prototipin performansının kestirilebileceği ölçeklendirme yasalarını elde etmek
- Parametreler arasında bulunan bağıntıdaki eğilimleri kestirmek (bazen).

### Benzerlik yasası:

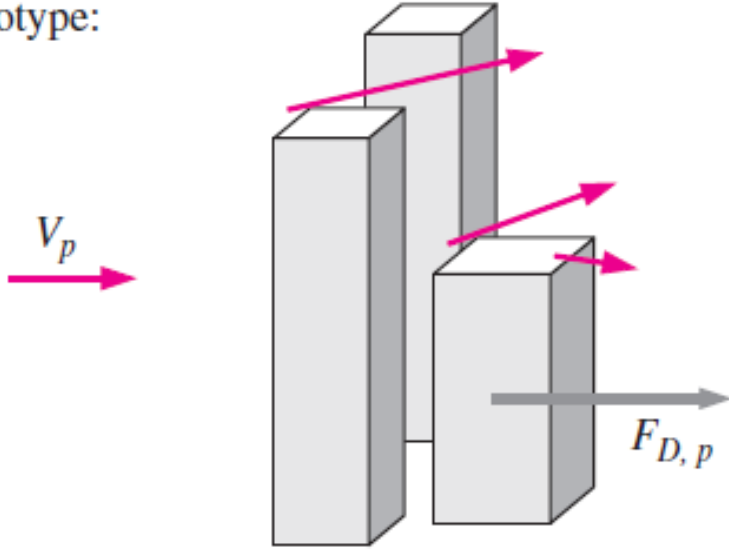
Bir model ve bir prototip arasında tam benzerlik olması için gerekli üç şart vardır.

**(1) Geometrik benzerlik** - model, prototip ile aynı şekle sahip olmalıdır. Fakat ölçeklendirme çarpanı olan bir sabitle ölçeklendirilebilir.

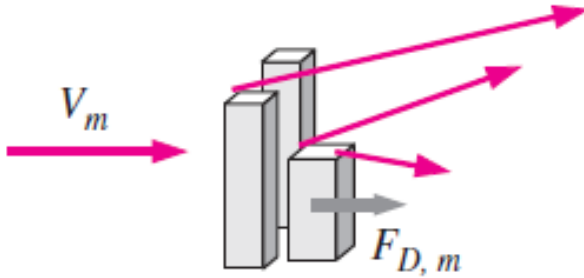
**(2) Kinematik benzerlik** - model akışta modelin herhangi bir noktasındaki hız, prototip akışta prototipte bu noktaya karşılık gelen noktadaki hız ile doğru (sabit ölçek çarpanı ile) orantılı olmalıdır

**(3) Dinamik benzerlik** - Model akıştaki bütün kuvvetler, prototip akışta bunlara karşılık gelen kuvvetlerin sabit bir çarpanla- ölçeklendirilmesi ile elde edildiğinde dinamik benzerliğe ulaşılmış olur (kuvvet- ölçekli, denklik).

Prototype:



Model:



Model akıştaki hız, prototip akışta buna karşılık gelen yerdeki hız ile doğru orantılı ve aynı yönde olduğunda kinematik benzerlik sağlanmış olur.

Genel bir akış alanında model ve prototip arasında tam benzerlik, sadece geometrik, kinematik ve dinamik benzerlik sağlandığında elde edilir.

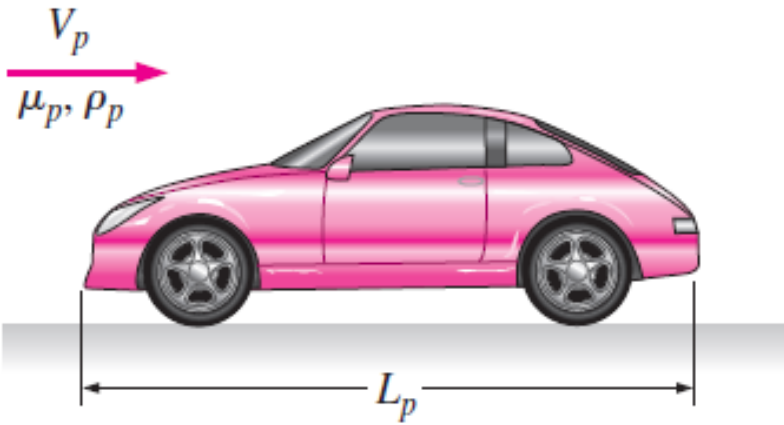
Yunan alfabesinden büyük Pi harfi ( $\pi$ ) boyutsuz bir parametreyi gösterebilir. Böyle bir  $\pi$  'ye daha önceden bildiğiniz Froude sayısından ( $Fr$ ) aşınasınız. Genel boyut analizi probleminde **bağımlı  $\pi$**  diyeceğimiz ve  $\pi_1$  ile göstereceğimiz bir  $\pi$  vardır.  $\pi_1$  parametresi genelde, diğer birkaç  $\pi$  'nin fonksiyonudur ve bunlara **bağımsız  $\pi$**  'ler denir. Fonksiyonel ilişki şöyledir:

*Functional relationship between  $\Pi$ 's:*  $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_k)$

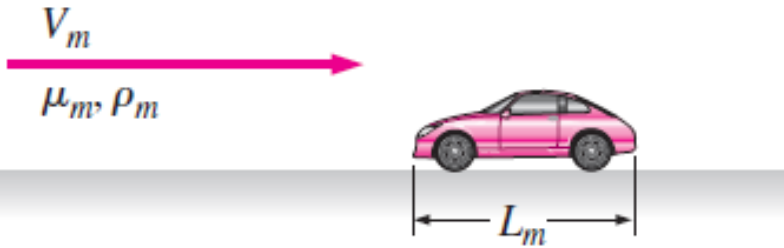
Tam benzerliği sağlamak için model ve prototip geometrik olarak benzer olmalı ve tüm bağımsız  $\pi$  grupları model ve prototipte birbirleriyle eşleşmelidir.

Benzerliği elde etmek için

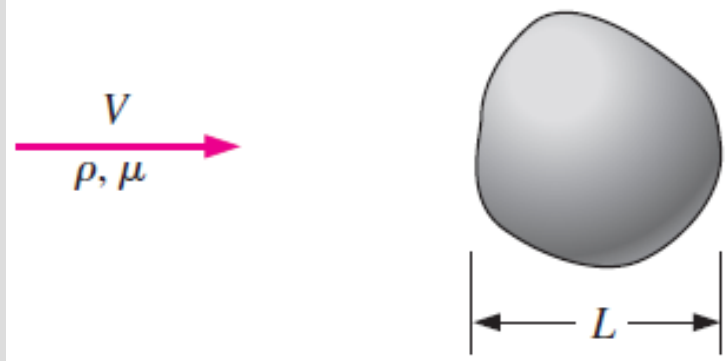
If  $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$  and  $\Pi_{3,m} = \Pi_{3,p} \dots$  and  $\Pi_{k,m} = \Pi_{k,p}$ ,  
then  $\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$  (7-12)



Model car



Boyu  $L_p$  olan bir prototip araba ve boyu  $L_m$  olan modeli arasındaki geometrik benzerlik



$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

Reynolds sayısı  $Re$ ; yoğunluk, karakteristik hız ve karakteristik uzunluğun çarpımının viskoziteye oranıdır. Alternatif olarak, karakteristik hız ve uzunluğun çarpımının  $\nu = \mu/\rho$  olarak tanımlanan kinematik viskoziteye oranıdır.

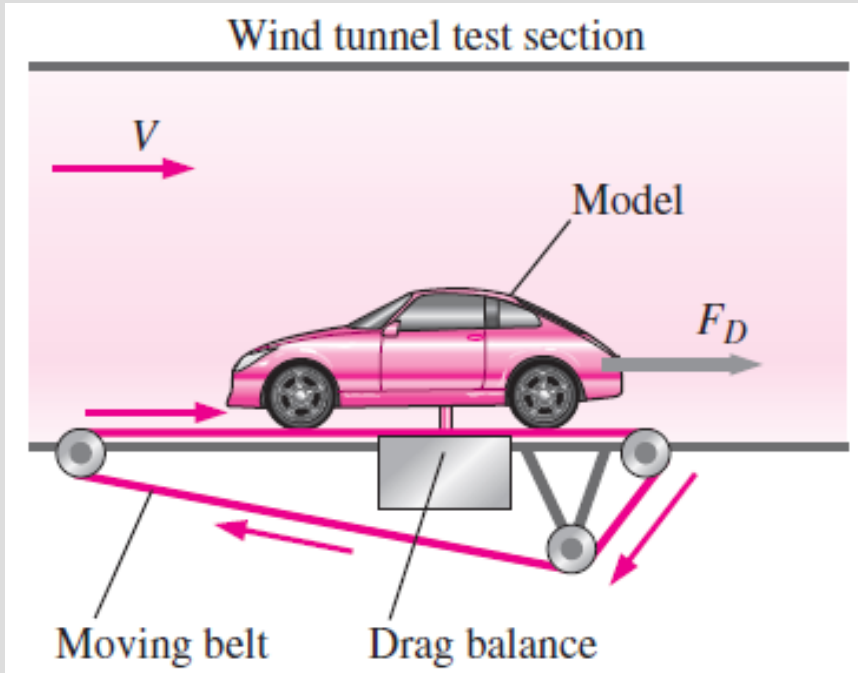
$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \quad \text{where} \quad \Pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \quad \text{and} \quad \Pi_2 = \frac{\rho VL}{\mu}$$

Reynolds sayısı, akışkanlar mekaniğinin genelinde en fazla tanınan ve en kullanışlı boyutsuz parametredir.

## Örnek 5: Model ve Prototip Arabalar Arasındaki Benzerlik

Yeni bir spor arabanın 80.0 km/h hız ve 25°C hava sıcaklığındaki aerodinamik direnci belirlenecektir. Otomotiv mühendisleri rüzgar tüneline test etmek üzere arabanın beşte biri ölçekli modelini yaparlar. Mevsim kışır ve rüzgar tüneli binanın ısıtılmayan kısmına yerleştirilmiştir, rüzgar tünelineki havanın sıcaklığı sadece 5 °C civarındadır. Model ve prototip arasındaki benzerliği elde edebilmeleri için mühendislerin rüzgar tüneline hangi hızda çalıştırmaları gerektiğini bulunuz.

**Properties** For air at atmospheric pressure and at  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$  and  $\mu = 1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ . Similarly, at  $T = 5^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1.269 \text{ kg/m}^3$  and  $\mu = 1.754 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ .



Direnç terazisi bir cismin rüzgar tüneline aerodinamik direncini ölçmek için kullanılan bir düzenektir. Otomobil modelleri test edilirken rüzgar tüneline zeminine, arabanın referans koordinat sistemine göre hareketli zemini temsil etmek üzere yürüyen bir bant eklenir.



**Analiz :** Bu problemde sadece bir bağımsız  $\Pi$  olduğundan,  $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$  olması halinde benzerlik denklemi (Denklem 7-12) geçerlidir.  $\Pi_2$ , Denklem 7—13 ile verilir ve Reynolds sayısı olarak adlandırılır. Buradan,

$$\Pi_{2,m} = Re_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \Pi_{2,p} = Re_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

yazarız. Bu denklemler model testlerinde bilinmeyen rüzgar tüneli hız  $V_m$ 'yi bulmak için çözülebilir:

$$V_m = V_p \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left( \frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left( \frac{L_p}{L_m} \right)$$
$$= (50.0 \text{ mi/h}) \left( \frac{1.754 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \right) \left( \frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3} \right) (5) = \mathbf{221 \text{ mi/h}}$$

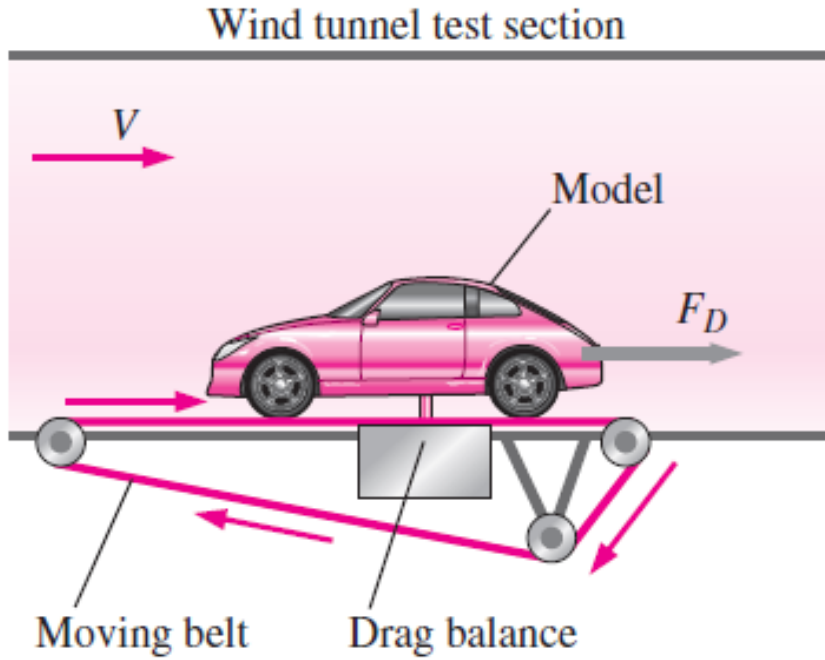
Dolayısıyla benzerliği sağlamak için rüzgar tünelinin 354 km/h 'lık,hızda (üç anlamlı basamağa göre) çalıştırılması gerektiği bulunur. Arabalardan hiç birinin gerçek uzunluğunun verilmemiş olmasına rağmen prototip, ölçekli modelin beş katı büyüklüğünde olduğu için  $L_p$ 'nin  $L_m$ 'ye oranının bilindiğine dikkat ediniz. Boyutlu parametreler boyutsuz oranlar şeklinde (daha önce de yapıldığı gibi) yeniden düzenlendiğinde birim sisteminin önemi ortadan kalkar. Paydaki birimler paydadaki birimlerle sadeleştiği için birimler arası dönüşüm de gereksizdir.

**İrdeleme:** Bu hız çok yüksektir (100 m/s civarında) ve rüzgar tüneli bu hızda çalışamayabilir. Öte yandan bu kadar yüksek hızda sıkıştırılamaz akış yaklaştırmı tartışmaya açık hale gelir (bunu daha sonra detaylı olarak tartışacağız).

## Örnek 6: Prototip Araba Üzerindeki Aerodinamik Direnç Kuvvetinin Kestirimi

Yeni bir spor arabanın 80.0 km/h hız ve 25°C hava sıcaklığındaki aerodinamik direnci belirlenecektir. Otomotiv mühendisleri rüzgar tüneline test etmek üzere arabanın beşte biri ölçekli modelini yaparlar. Mevsim kışır ve rüzgar tüneli binanın ısıtılmayan kısmına yerleştirilmiştir, rüzgar tünelineki havanın sıcaklığı sadece 5°C civarındadır. Model ve prototip arasında benzerliği elde etmek için mühendislerin rüzgar tüneline 354 km/h hızında çalıştırdıklarını düşününüz. Model araba üzerindeki aerodinamik direnç kuvveti direnç terazisi ile ölçülmektedir ve birkaç direnç değeri kaydedilmektedir. Model üzerindeki ortalama direnç kuvveti 94 N olduğuna göre prototip üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetini (25 km/h ve 25°de) belirleyiniz.

**Properties** For air at atmospheric pressure and at  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$  and  $\mu = 1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ . Similarly, at  $T = 5^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1.269 \text{ kg/m}^3$  and  $\mu = 1.754 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ .



Direnç terazisi bir cismin rüzgar tüneline aerodinamik direncini ölçmek için kullanılan bir düzendir. Otomobil modelleri test edilirken rüzgar tüneline zeminine, arabanın referans koordinat sistemine göre hareketli zemini temsil etmek üzere yürüyen bir bant eklenir.

**ÇÖZÜM** Benzerlikten dolayı prototip üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetini belirlemek için modelden alınan sonuçlar ölçeğe göre büyütülebilir.

**Analiz** Benzerlik denklemi (Denklem 7-12)  $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$  olduğundan,  $\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$  olacağını ifade eder. Bu problem için  $\Pi_1$  Denklem 7-13 ile verilmiştir. Öyleyse,

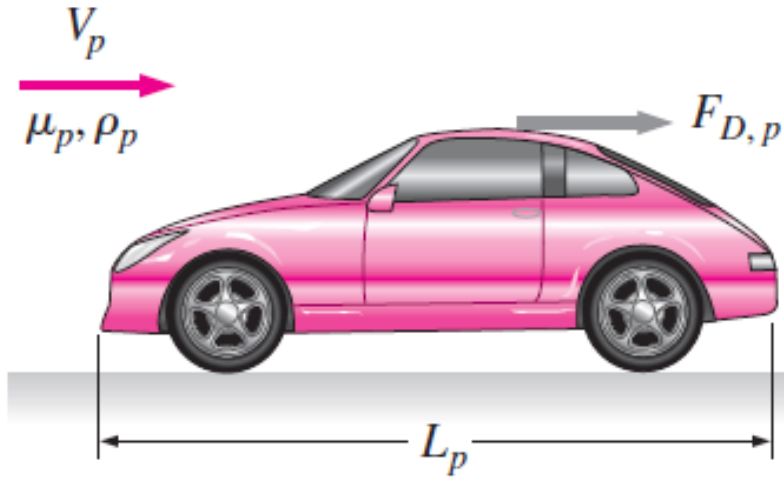
$$\Pi_{1,m} = \frac{F_{D,m}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \Pi_{1,p} = \frac{F_{D,p}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

yazarız. Bu denklem, prototip üzerindeki bilinmeyen aerodinamik direnç kuvveti  $F_{D,p}$  için çözülebilir:

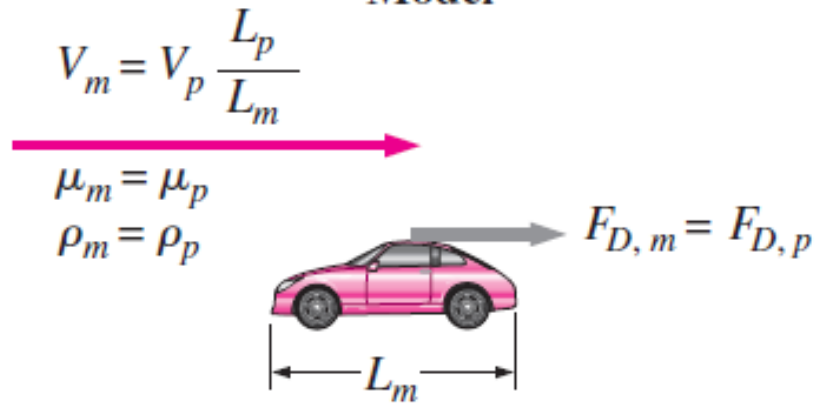
$$\begin{aligned} F_{D,p} &= F_{D,m} \left( \frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left( \frac{V_p}{V_m} \right)^2 \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^2 \\ &= (94 \text{ N}) \left( \frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3} \right) \left( \frac{80.0 \text{ km/h}}{354 \text{ km/h}} \right)^2 (5)^2 = 112 \text{ N} \end{aligned}$$

**İrdeleme:** Boyutlu parametreler boyutsuz oranlar şeklinde düzenlendiğinde, birimler; SI ve İngiliz birimlerinin karışımı olsa bile tamamen sadeleşir.  $\Pi$  'in denkleminde hem; hızın hem de, uzunluğun karesi, alındığından; rüzgar tünelineki yüksek hız, modelin; küçük boyutta olmasının etkisini hemen hemen dengeler ve böylece, model üzerindeki, direnç kuvveti hemen hemen prototip üzerindeki ile aynı olur. Gerçekte rüzgar tünelineki havanın yoğunluğu ve viskozitesi prototip üzerinde akan havaninkilerle aynı ise her iki direnç kuvveti de aynıdır (Şekil 7-20).

## Prototype



## Model



Prototip üzerinden akan hava ile rüzgar tünelineki havanın aynı özelliklere sahip olduğu ( $\rho_m = \rho_p$ ,  $\mu_m = \mu_p$ ) ve aynı benzerlik şartlarını taşıdığı ( $V_m = V_p L_p / L_m$ ) özel durumda, prototip üzerindeki aerodinamik direnç kuvveti, ölçekli modeldekine eşittir. Eğer iki akışkanın özellikleri aynı değilse, benzer dinamik şartlar altında olsalar da direnç kuvvetleri aynı olmak zorunda değildir.

1/5 ölçekli modeli test etmek üzere rüzgar tüneli yerine su tüneli kullanıyor olsun. Oda sıcaklığındaki suyun özelliklerini kullanarak, benzerliği elde etmek için gereken su tüneli hızı:

$$V_m = V_p \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left( \frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left( \frac{L_p}{L_m} \right)$$
$$= (50.0 \text{ mi/h}) \left( \frac{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \right) \left( \frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{998.0 \text{ kg/m}^3} \right) (5) = 16.1 \text{ mi/h}$$



Görüldüğü üzere su tünelinin bir avantajı, gerekli su tüneli hızının aynı ebattaki model için gerekli rüzgar tüneli hızından çok daha az olmasıdır.

Model akışkanı prototip akışkanından farklı bile olsa yine de benzerlik elde edilebilir. Burada bir denizaltı modeli rüzgar tünelinde test edilmektedir.

# 7-4 ■ TEKRARLAYAN DEĞİŞKENLER YÖNTEMİ VE BUCKINGHAM PI TEOREMİ

Şimdi boyutsuz parametreler olan  $\Pi$  'leri nasıl oluşturacağımızı öğrenmeye hazırız.

Bu amaç için geliştirilmiş bir kaç değişik yöntem vardır fakat en ünlüsü (ve en basiti) **tekrarlayan değişkenler yöntemidir**.

Tekrarlayan değişkenler yöntemini oluşturan altı adımın çok kısa özet,

## The Method of Repeating Variables

**Step 1:** List the parameters in the problem and count their total number  $n$ .

**Step 2:** List the primary dimensions of each of the  $n$  parameters.

**Step 3:** Set the *reduction*  $j$  as the number of primary dimensions. Calculate  $k$ , the expected number of  $\Pi$ 's,  
$$k = n - j$$

**Step 4:** Choose  $j$  repeating parameters.

**Step 5:** Construct the  $k$   $\Pi$ 's, and manipulate as necessary.

**Step 6:** Write the final functional relationship and check your algebra.



Detailed description of the six steps that comprise the *method of repeating variables*\*

---

**Step 1** List the parameters (dimensional variables, nondimensional variables, and dimensional constants) and count them. Let  $n$  be the total number of parameters in the problem, including the dependent variable. Make sure that any listed independent parameter is indeed independent of the others, i.e., it cannot be expressed in terms of them. (E.g., don't include radius  $r$  and area  $A = \pi r^2$ , since  $r$  and  $A$  are *not* independent.)

**Step 2** List the primary dimensions for each of the  $n$  parameters.

**Step 3** Guess the **reduction**  $j$ . As a first guess, set  $j$  equal to the number of primary dimensions represented in the problem. The expected number of  $\Pi$ 's ( $k$ ) is equal to  $n$  minus  $j$ , according to the **Buckingham Pi theorem**,

$$\text{The Buckingham Pi theorem:} \quad k = n - j \quad (7-14)$$

If at this step or during any subsequent step, the analysis does not work out, verify that you have included enough parameters in step 1. Otherwise, go back and *reduce  $j$  by one* and try again.

**Step 4** Choose  $j$  **repeating parameters** that will be used to construct each  $\Pi$ . Since the repeating parameters have the potential to appear in each  $\Pi$ , be sure to choose them *wisely* (Table 7-3).

**Step 5** Generate the  $\Pi$ 's one at a time by grouping the  $j$  repeating parameters with one of the remaining parameters, forcing the product to be dimensionless. In this way, construct all  $k$   $\Pi$ 's. By convention the first  $\Pi$ , designated as  $\Pi_1$ , is the *dependent*  $\Pi$  (the one on the left side of the list). Manipulate the  $\Pi$ 's as necessary to achieve established dimensionless groups (Table 7-5).

**Step 6** Check that all the  $\Pi$ 's are indeed dimensionless. Write the final functional relationship in the form of Eq. 7-11.

---

\* This is a step-by-step method for finding the dimensionless  $\Pi$  groups when performing a dimensional analysis.

**Step 1** *List of relevant parameters:*  $z = f(t, w_0, z_0, g)$   $n = 5$

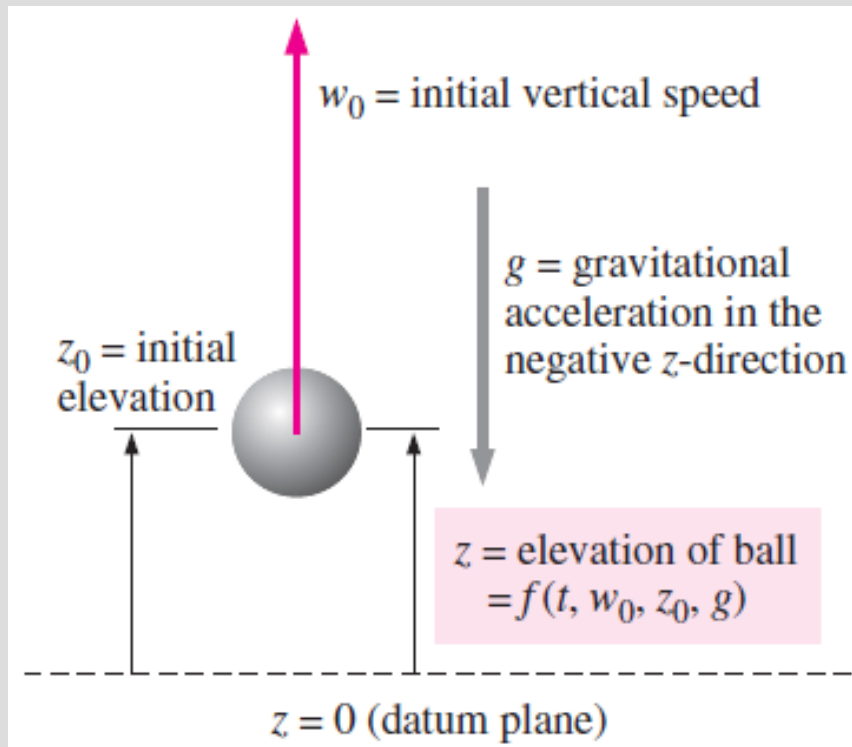
**Step 2**

$z$	$t$	$w_0$	$z_0$	$g$
$\{L^1\}$	$\{t^1\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1t^{-2}\}$

**Step 3** *Reduction:*  $j = 2$  Ana boyut sayısı –  $z, t$

*Number of expected  $\Pi$ 's:*  $k = n - j = 5 - 2 = 3$

**Step 4** *Repeating parameters:*  $w_0$  and  $z_0$



Boşlukta düşen topun boyut analizi için düzenek,  $z$  yüksekliği,  $t$  zamanının,  $w_0$  ilk düşey hızının,  $z_0$  ilk yüksekliğini ve  $g$  yer çekim sabitinin bir fonksiyonudur.



## Adım 5

*Dependent  $\Pi$ :*  $\Pi_1 = zw_0^{a_1}z_0^{b_1}$

*Dimensions of  $\Pi_1$ :*  $\{\Pi_1\} = \{L^0t^0\} = \{zw_0^{a_1}z_0^{b_1}\} = \{L^1(L^1t^{-1})^{a_1}L^{b_1}\}$

*Time:*  $\{t^0\} = \{t^{-a_1}\} \quad 0 = -a_1 \quad a_1 = 0$

*Length:*  $\{L^0\} = \{L^1L^{a_1}L^{b_1}\} \quad 0 = 1 + a_1 + b_1 \quad b_1 = -1 - a_1 \quad b_1 = -1$

$$\Pi_1 = \frac{z}{z_0}$$

*First independent  $\Pi$ :*  $\Pi_2 = tw_0^{a_2}z_0^{b_2}$

*Dimensions of  $\Pi_2$ :*  $\{\Pi_2\} = \{L^0t^0\} = \{tw_0^{a_2}z_0^{b_2}\} = \{t(L^1t^{-1})^{a_2}L^{b_2}\}$

Equating exponents,

*Time:*  $\{t^0\} = \{t^1t^{-a_2}\} \quad 0 = 1 - a_2 \quad a_2 = 1$

*Length:*  $\{L^0\} = \{L^{a_2}L^{b_2}\} \quad 0 = a_2 + b_2 \quad b_2 = -a_2 \quad b_2 = -1$

$$\Pi_2 = \frac{w_0 t}{z_0}$$

*Second independent  $\Pi$ :*  $\Pi_3 = gw_0^{a_3}z_0^{b_3}$

*Dimensions of  $\Pi_3$ :*  $\{\Pi_3\} = \{L^0t^0\} = \{gw_0^{a_3}z_0^{b_3}\} = \{L^1t^{-2}(L^1t^{-1})^{a_3}L^{b_3}\}$

Equating exponents,

$$\text{Time: } \{t^0\} = \{t^{-2}t^{-a_3}\} \quad 0 = -2 - a_3 \quad a_3 = -2$$

$$\text{Length: } \{L^0\} = \{L^1L^{a_3}L^{b_3}\} \quad 0 = 1 + a_3 + b_3 \quad b_3 = -1 - a_3 \quad b_3 = 1$$

$$\Pi_3 = \frac{gz_0}{w_0^2}$$

Modified  $\Pi_3$ :

$$\Pi_{3, \text{modified}} = \left(\frac{gz_0}{w_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{w_0}{\sqrt{gz_0}} = \text{Fr}$$

**Multiplication: Add exponents**

$$x^a x^b x^{2c} = x^{a+b+2c}$$

**Division: Subtract exponents**

$$\frac{x^a}{x^b} \times \frac{1}{x^{2c}} = x^{a-b-2c}$$

**Hint of the Day**

*A wise choice of repeating parameters for most fluid flow problems is a length, a velocity, and a mass or density.*

$$\{\Pi_1\} = \{m^0 L^0 t^0 T^0 I^0 C^0 N^0\} = \{1\}$$

$$\{\Pi_2\} = \{m^0 L^0 t^0 T^0 I^0 C^0 N^0\} = \{1\}$$

.

.

.

$$\{\Pi_k\} = \{m^0 L^0 t^0 T^0 I^0 C^0 N^0\} = \{1\}$$

Çarpma ve bölme işlemlerinde üslerin toplanması ve çıkarılması kuralı

Ortak parametreleri tekrarlayan parametreler olarak seçmek akıllıcadır çünkü bunlar boyutsuz  $\Pi$  gruplarınızın her birinde görülebilir.

Tekrarlayan değişkenler yönteminden elde edilen  $\Pi$  grupları boyutsuzdur. Çünkü yedi ana boyutun tamamının üslerini sıfır olmaya zorluyoruz

Aaron, you've made it!  
They named a nondimensional  
parameter after you!



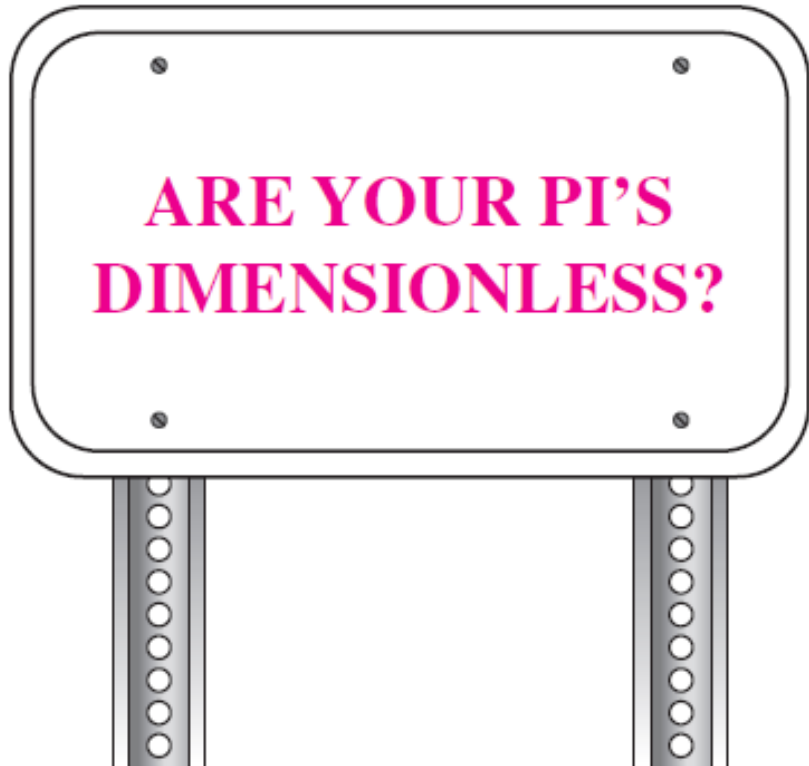
**Tanınmış boyutsuz parametreler adlarını, çoğunlukla tanınmış bir bilim insanı veya mühendisten alır.**

## Adım 6

Relationship between  $\Pi$ 's:  $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \rightarrow \frac{z}{z_0} = f\left(\frac{w_0 t}{z_0}, \frac{w_0}{\sqrt{gz_0}}\right)$

Final result of dimensional analysis:  $z^* = f(t^*, Fr)$

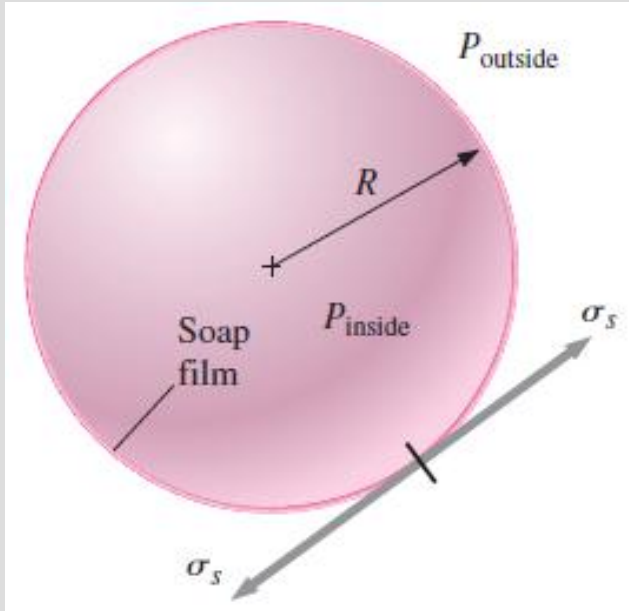
Tekrarlayan değişkenler yöntemi denklemin matematiksel biçimini tam olarak veremez.



Cebirsel işlemlerinizi hızlı bir şekilde gözden geçirmeniz yerinde olur.

## Örnek 7: Sabun Köpüğündeki Basınç

Birkaç çocuk sabun köpüğü ile oynamaktadır ve siz de köpüğün yarıçapı ile iç basıncı arasındaki ilişkiyi merak ediyorsunuz. Sabun köpüğündeki iç basıncın, atmosfer basıncından daha büyük olması gerektiğini ve köpüğün kabuğunun balon gibi gerilim altında olduğunu düşünüyorsunuz. Bura ek olarak, bu problemde yüzey gerilimi özelliğinin önemli olması gerektiğini de biliyorsunuz. Diğer fiziksel konuları bilmeden, boyut analizini kullanarak problemi ele almaya karar veriyorsunuz. Basınç farkı,  $\Delta P = P_{iç} - P_{dış}$ , köpük yarıçapı ve sabun filminin yüzey gerilimi  $\sigma_s$  arasında bir ilişki kurunuz.



Sabun filmindeki yüzey gerilimden dolayı, köpüğün iç basıncı kendisini çevreleyen basınçtan daha büyüktür.

**Kabuller:** 1) Sabun köpüğü havada asılı kalmaktadır ve yerçekimi önemsizdir. 2) Bu problemde diğer değişkenlerin ve sabitlerin önemi yoktur. ‘

**Analiz:** Tekrarlayan değişkenler yöntemini adım adım uygulayalım.

**Adım 1:** Problemden 3 tane değişken veya sabit vardır;  $n = 3$ . Bağımlı değişken, bağımsız değişkenlerin ve sabitlerin fonksiyonu olacak şekilde verilir.

İlgili parametrelerin listesi:

$$\Delta P = f(R, \sigma_s) \quad n = 3$$

**Adım 2:** Her bir parametrenin ana boyutları liste halinde yazılır. Yüzey geriliminin boyutları Örnek 1'den, basıncınkiler ait olanlar ise Örnek 2'den elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} \Delta P & R & \sigma_s \\ \{m^1 L^{-1} t^{-2}\} & \{L^1\} & \{m^1 t^{-2}\} \end{array}$$

**Adım 3:** İlk tahmin olarak  $j$ 'yi, problemdeki ana boyutların sayısı olan 3 olarak alalım ( $m$ ,  $L$  ve  $t$ ).

$$j = 3$$

Eğer  $j$ 'nin bu değeri doğru ise, beklenen  $\Pi$  adedi  $k = n - j = 3 - 3 = 0$ 'dir, Fakat nasıl olur da sıfır tane  $\Pi$  olur? Bazı şeylerin doğru gitmediği açıkça görülüyor. Böyle durumlarda öncelikle geri gitmeliyiz ve problemde önemli bazı değişkenleri veya sabitleri göz ardı etmediğimizden emin olmalıyız. Basınç farkının sadece köpük yarıçapı ve yüzey gerilimine bağlı olduğundan emin olduğumuz için  $y$ 'yi bir azaltırız,

**Adım 4:**  $j=2$  olduğu için iki tane tekrarlayan parametre seçmemiz gerekiyor. Tablo 7-3'deki önemli noktaların takip edilmesiyle,  $\Delta P$  bağımlı değişken olduğu için tek seçenek  $R$  ve  $\sigma_s$  kalır.

**What happens if**

$$k = n - j = 0?$$

**Do the following:**

- Check your list of parameters.
- Check your algebra.
- If all else fails, reduce  $j$  by one.

Eğer tekrarlayan değişkenler yöntemi sıfır tane  $\Pi$  verirse, ya bir hata yapmışsınız ya da  $j$ 'yi bir azaltıp baştan başlamamız gerekir.

**Adım 5:** Bağımlı  $\Pi$ 'yi elde etmek içiri, bu tekrarlayan parametreleri  $\Delta P$  bağımlı değişkeni ile çarpım haline getiririz.

Bağımlı  $\Pi$ : 
$$\Pi_1 = \Delta PR^{a_1} \sigma_s^{b_1} \quad (1)$$

İkinci adımdaki ana boyutları Denklem 1'e uygular ve  $\Pi$ 'yi boyutsuz olmaya zorlarız.

*Dimensions of  $\Pi_1$ :*

$$\{\Pi_1\} = \{m^0 L^0 t^0\} = \{\Delta PR^{a_1} \sigma_s^{b_1}\} = \{(m^1 L^{-1} t^{-2}) L^{a_1} (m^1 t^{-2})^{b_1}\}$$

We equate the exponents of each primary dimension to solve for  $a_1$  and  $b_1$ :

*Time:*  $\{t^0\} = \{t^{-2} t^{-2b_1}\} \quad 0 = -2 - 2b_1 \quad b_1 = -1$

*Mass:*  $\{m^0\} = \{m^1 m^{b_1}\} \quad 0 = 1 + b_1 \quad b_1 = -1$

*Length:*  $\{L^0\} = \{L^{-1} L^{a_1}\} \quad 0 = -1 + a_1 \quad a_1 = 1$

Fortunately, the first two results agree with each other, and Eq. 1 thus becomes

$$\Pi_1 = \frac{\Delta PR}{\sigma_s} \quad (2)$$

sonucunu verir.

Tablo 7-5'ten, Denklem 2'ye en çok benzeyen tanınmış boyutsuz parametrenin,  $[(\rho V^2) \times \text{uzunluk/yüzey gerilimi}]$  olarak tanımlanan Weber sayısı olduğu görülmektedir,  $(\rho V^2$ 'nin basınç boyutunda olduğuna dikkat ediniz.)

Elde edilen  $\Pi$  üzerinde herhangi bir manipülasyon yapmaya gerek yoktur.

**Adım 6:** Nihai fonksiyonel ilişkiyi yazalım. Elimizdeki problemde, herhangi bir şeyin fonksiyonu olmayan sadece bir  $\Pi$  vardır. Bu ise sadece  $\Pi$ 'nin sabit olması ile mümkündür. Denklem 2'yi Denklem 7-1'in fonksiyonel formuna sokalım:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta PR}{\sigma_s} = f(\text{nothing}) = \text{constant} \quad \rightarrow \quad \Delta P = \text{constant} \frac{\sigma_s}{R} \quad (3)$$

**İrdeleme:** Bu örnek, problemin fiziği hakkında fazla bir şey bilmeksizin boyut analizi ile eğilimlenn nasıl kestirilebileceğini göstermektedir. Örneğin, elde ettiğimiz sonuçlardan köpük yarıçapının iki katına çıkması ile basınç farkının yarıya ineceğini biliyoruz. Benzer şekilde, köpüğün yüzey gerilimi değeri iki katına çıkarsa  $\Delta P$  iki katına çıkartır Boyut analizi ile Denklem 3'teki sabit değer kestirilemez ileri seviyede bir analiz (veya bir deney) sabitin değerinin 4 olduğunu ortaya koyacaktır.



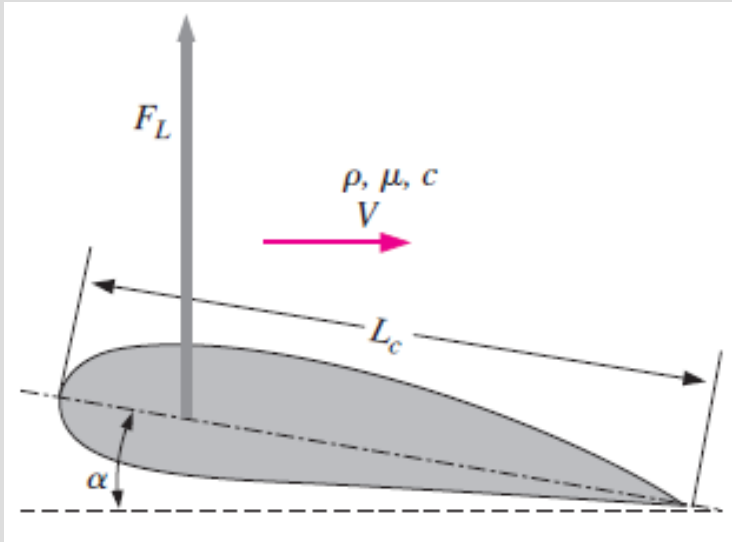
## ÖRNEK 8: Bir Kanat Üzerindeki Kaldırma

Birkaç havacılık mühendisi uçak tasarlıyorlar ve tasarladıkları yeni kanadın oluşturacağı kaldırma hesaplamak istiyorlar. Kanadın kiriş uzunluğu  $L_c = 1.12$  m ve **üst bakış alanı**  $A$  (kanat hücum açısı sıfır iken üstten bakıldığında görülen alan),  $10.7$  m<sup>2</sup>'dir. Prototip  $T = 25^\circ\text{C}$  sıcaklığındaki zemine yakın bölgeden  $V = 52.0$  m/s hızında uçacaktır. Basınçlı rüzgar tüneline test etmek üzere kanadın 1/10 ölçekli modeli yapılmıştır, Mühendisler, dinamik benzerliği elde etmek için rüzgar tüneline hangi hız ve basınçta çalıştırmalıdır?

**ÇÖZÜM:** Dinamik benzerliği elde etmek için rüzgar tüneline hangi hız ve basınçta çalıştırılması gerektiğini hesaplayacağız.

**Kabuller:** 1) Prototip kanat standart atmosferik basınçtaki havada uçmaktadır.  
2) Model prototipe geometrik olarak benzemektedir.

**Analiz:** ilk olarak, boyutsuz parametreleri elde etmek üzere tekrarlayan değişkenlerin adım adım yöntemi uygulanır. Sonra prototip ile model arasında bağımlı  $\Pi$ 'ler birbirlerine eşleştirilir.



Yoğunluğu  $\rho$ , viskozitesi  $\mu$ , ses hızı  $c$ , hücum açısı  $\alpha$ , serbest akım hızı  $V$  olan akışın içinde kiriş uzunluğu  $L_c$ , olan kanattaki kaldırma. Hücum açısı  $\alpha$ , serbest akım akışı geliş yönüne göre ölçülmüştür.

**Adım 1:** Bu problemde yedi tane parametre (değişken ve sabit) vardır. Bağımlı değişkenler bağımsız parametrelerin fonksiyonu olacak şekilde fonksiyonlar halinde listelenir.

İlgili parametrelerin listesi  $F_L = f(V, L_c, \rho, \mu, c, \alpha) \quad n = 7$

Burada  $F_L$  kanattaki kaldırma kuvveti,  $V$  akışkanın hızı,  $L_c$  giriş uzunluğu,  $\rho$  akışkanın yoğunluğu,  $\mu$  akışkanın viskozitesi,  $c$  akışkan içindeki ses hızı ve  $\alpha$  kanadın hücum açısıdır.

**Adım 2:** Her bir parametrenin ana boyutları listelenir;  $\alpha$  açısı boyutsuzdur:

$$\begin{array}{ccccccc} F_L & V & L_c & \rho & \mu & c & \alpha \\ \{m^1L^1t^{-2}\} & \{L^1t^{-1}\} & \{L^1\} & \{m^1L^{-3}\} & \{m^1L^{-1}t^{-1}\} & \{L^1t^{-1}\} & \{1\} \end{array}$$

**Adım 3:** ilk tahmin olarak  $j$ , problemde verilen ana boyutların sayısı ( $m$ ,  $L$  ve  $t$ ) olan 3 'e eşit alınır.  $j = 3$

Eğer  $j$ 'nin bu değeri doğru ise beklenen  $\Pi$ 'lerin sayısı  $k = n - j = 7 - 3 = 4$  olur.

**Adım 4:**  $j = 3$  olduğu için üç tane tekrarlayan parametre seçmemiz gerekmektedir. Tablo 7-3'te listelenen önemli noktaları takip ettiğimizde bağımlı değişken olan  $F_L$ 'yi alamayacağımızı görürüz. Zaten boyutsuz olduğu için  $\alpha$  'yı da alamayız. Boyutları aynı olduğu için  $V$  ve  $c$  'nin ikisini birden seçemeyiz.  $M$  'nün tüm  $\Pi$  'lerde görülmesi istenmez. Bunlardan dolayı, tekrarlayan parametreler için en iyi seçenekler ya  $V$ ,  $L_c$  ve  $\rho$  ya da  $c$ ,  $L_c$  ve  $\rho$  'dur. Bunlardan birincisi daha iyi seçenektir, çünkü ses hızı Tablo 7-5 'te verilen tanınmış boyutsuz parametrelerinin sadece birinde vardır. Bunun yanında hız ölçeği daha "yaygındır" ve parametrelerin bir kaçında görülür (Şekil 7-32). Tekrarlayan parametreler  **$V$ ,  $L_c$  ve  $\rho$**  alınır.

**Adım 5:** Bağımlı  $\Pi$  oluşturulur:

$$\Pi_1 = F_L V^{a_1} L_c^{b_1} \rho^{c_1} \rightarrow \{\Pi_1\} = \{(m^1 L^1 t^{-2})(L^1 t^{-1})^{a_1} (L^1)^{b_1} (m^1 L^{-3})^{c_1}\}$$

$\Pi$ 'lerin boyutsuz olmaya zorlanması ile üsler hesaplanır (cebirsal işlemler gösterilmemiştir). Bunun sonucunda da  $a_1 = -2$ ,  $b_1 = -2$  ve  $c_1 = -1$  elde ederiz. Buradan bağımlı  $\Pi$  aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Pi_1 = \frac{F_L}{\rho V^2 L_c^2}$$

Tablo 7-5'ten  $\Pi$ 'mize en çok benzeyen tanınmış boyutsuz parametre, giriş uzunluğunun karesinden ziyade, paydasında  $k$  olan üst bakış alanı  $A$ 'ya göre tanımlanmış kaldırma katsayısıdır. Buna göre, bu  $\Pi$  üzerinde Tablo 7-4 'deki önemli noktalara göre manipülasyon yapabiliriz ve aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\text{Modified } \Pi_1: \quad \Pi_{1, \text{modified}} = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} = \text{Lift coefficient} = C_L$$

Benzer yolla ilk bağımsız  $\Pi$  oluşturulur

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} L_c^{b_2} \rho^{c_2} \rightarrow \{\Pi_2\} = \{(m^1 L^{-1} t^{-1})(L^1 t^{-1})^{a_2} (L^1)^{b_2} (m^1 L^{-3})^{c_2}\}$$

Buradan  $a_2 = -1$ ,  $b_2 = -1$  ve  $c_2 = -1$  elde edilir.

Böylece, 
$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L_c}$$

olarak bulunur. Bu  $\Pi$  'yi Reynolds sayısının tersi olarak biliyoruz. Tersini aldıktan sonra değiştirilmiş  $\Pi_2$ :

$$\Pi_{2, \text{modified}} = \frac{\rho V L_c}{\mu} = \text{Reynolds number} = Re$$

CAUTION!

CHOOSE YOUR  
REPEATING  
PARAMETERS  
WISELY

Tekrarlayan değişkenler yönteminin uygulanmasında yöntemin en zor yanı, tekrarlayan parametrelerin seçimidir. Fakat uygulama yaparak bu parametreleri akıllıca seçmeyi öğrenebilirsiniz.

Üçüncü  $\Pi$  ses hızı ile oluşturulur, ara işlemler size bırakılmıştır. Sonuç;

$$\Pi_3 = \frac{V}{c} = \text{Mach number} = \text{Ma}$$

olarak bulunur. Son olarak, hücum açısı  $\alpha$  zaten boyutsuz olduğu için kendisi başlı başına boyutsuz bir  $\Pi$  grubudur. Cebirsel işlemleri siz yapınız; tüm üslerin sıfır çıktığını göreceksiniz, buradan

$$\Pi_4 = \alpha = \text{Angle of attack}$$

olarak bulunur.

**Adım 6:** Nihai fonksiyonel ilişkiyi yazalım:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = f(\text{Re}, \text{Ma}, \alpha) \quad (1)$$

Boyutsuz parametrenin kendisi başlı başına bir  $\Pi$  parametresi olur

Boyutsuz bir parametrenin (açı gibi) kendisi zaten başlı başına  $\Pi$  'dir ve bu  $\Pi$  'yi daha fazla cebirsel işlem yapmadan biliyoruz.

Dinamik benzerliği elde etmek için Denklem 7-12, Denklem 1'deki bağımlı boyutsuz parametrelerin üçünün birden model ile prototip arasında eşleşmesini gerektirir. Hücüm açısını eşleştirmek anlamsızdır fakat Reynolds sayısı ve Mach sayısını aynı anda eşleştirmek de o kadar kolay değildir. Örneğın, eğer rüzgar tüneli prototip ile aynı sıcaklık ve basınçta çalıştırılırsa (model üzerinde akan havanın  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c$ 'si prototip üzerinden akan havanıninkilerle aynı olursa) rüzgâr tünelindeki hava hızını prototipinkinin 10 katı yaparak Reynolds sayısı benzerliği elde edilebilir (model 1/10 ölçekli olduğu için). Ancak bu durumda Mach sayıları 10 katı kadar farklılaşacaktır. 25°'de  $c$  yaklaşık olarak 346 m/s prototip uçak kanadının Mach sayısı ise  $Ma_p = 52.0/346=0.150$  (sesaltı) olur. Oysa istenen rüzgar tüneli hızında  $Ma_m = 1.50$  olur (ses üstü). Bu istenmeyen bir durumdur, çünkü akışın fiziği sesaltı şartlardan sesüstü şartlara-hızlı bir şekilde değişir. Diğer taraftan Mach sayılarını eşleştirmek istersek modelin Reynolds sayısı 10'da birine inecektir.

Peki ne yapmalıyız? Yaygın bir kaba kural şudur: Mach sayısının 0.3'ten küçük olduğu durumlarda (burada şanslıyız) sıkıştırılabilirlik etkisi uygulamada ihmal edilebilir. Bundan dolayı,  $Ma_m = 0.3$ 'ün altında tutulduğu sürece Mach sayılarını tam olarak eşleştirmek gerekmez ve Reynolds sayısı eşleştirilerek dinamik benzerlik yaklaşık olarak elde edilebilir. Problem şimdi başka bir hale dönüşür. Mach sayısını düşük tutarken  $Re$  'yi nasıl eşleştirebiliriz? Burada rüzgar tünelinin basınçlandırma özelliği işın içine girer. Sabit sıcaklıkta yoğunluk basınç ile orantılıdır, viskozite ve ses hızı basıncın çok zayıf fonksiyonlarıdır. Eğer rüzgar tünelinin basıncı 10 atm 'e çıkarılırsa, modelin test hızı prototipinkiyle aynı yapılabilir. Böylece  $Re$  ve  $Ma$  'nın her ikisinde de neredeyse mükemmel bir eşleşme elde edilir. Yine de 5 atm 'lik maksimum rüzgar tüneli basıncında gereken rüzgar tüneli hızı, prototipinkinin iki katı veya 104 m/s olacaktır. Böylece rüzgar tüneli modelinin Mach sayısı  $Ma_m = 104/346 = 0.301$  olacaktır. Kaba kuralımıza göre yaklaşık olarak sıkıştırılamazlık sınırında. Özetle, rüzgar tüneli yaklaşık olarak 100 m/s, 5 atm ve 25°C'de çalıştırılmazdır.

**İrdeleme:** Bu örnek boyut analizinin sınırlamalarından (sinir bozucu) birisini göstermektedir. Yani model testinde tüm bağımlı  $\Pi$  'leri her zaman aynı anda eşleştiremeyebilirsiniz. Yalnızca en önemli  $\Pi$  'lerin eşleşmesi üzerinde uzlaşma sağlanmalıdır. Akışkanlar mekaniği uygulamalarının birçoğunda Reynolds sayısı, yeteri kadar yüksek olmak kaydıyla dinamik benzerlik için kritik değer değildir. Eğer örneğin Mach sayısı 0.3 'ten önemli oranda büyükse, mantıklı sonuçları garanti etmek için Reynolds sayısından ziyade Mach sayısını hassas bir şekilde eşleştirmek bizim için akıllıca bir hareket olacaktır. Bunun yanında, modeli test etmek için başka bir gaz kullanılırsa, özgül ısı oranını ( $k$ ) eşleştirmemiz gerekir, çünkü sıkıştırılabilir akış davranışı kuvvetli bir şekilde  $A'$  'ya bağlıdır (Bölüm 12). Böyle model testleriyle ilgili problemleri Kısım 7-5'de ayrıntılı olarak tartışacağız.

Örnek 7-5 ve 7-6'ya tekrar dönelim. Prototip arabanın hava hızının 80.0 km/h ve rüzgar tüneli hızının ise 354 km/h olduğunu hatırlayalım. Bu hız 25°C'de, prototip Mach sayısı  $Ma_p = 0.065$ 'e karşılık gelir ve 5°C'de rüzgar tünelinin Mach sayısı 0.29'dur — sıkıştırılamazlık sınırında. Sonuçta, ilave birli olarak Mach sayısını oluşturacak olan ses hızının boyut analizimize dahil etmiş olmamız gerektiğini anlamış oluyoruz. Mach sayısını düşük tutarken Reynolds sayısını eşleştirmenin başka bir yolu, su gibi bir sıvı kullanmaktır, çünkü çok yüksek hızlarda bile sıvılar neredeyse sıkıştırılamazdır.

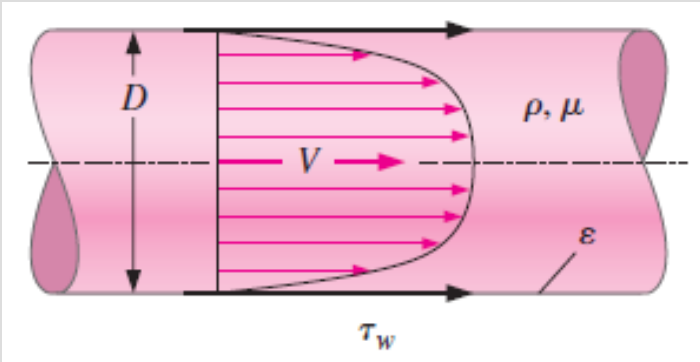
## Örnek 9: Bir Borudaki Sürtünme

Yoğunluğu  $\rho$ , viskozitesi  $\mu$  ve çapı  $D$  olan bir borunun uzun ve yatay kısmındaki bir sıkıştırılmaz akışı ele alalım. Hız profili aşağıdaki şekilde çizilmiştir, borunun en-kesitindeki ortalama hız  $V$  olup kütle korunurundan dolayı boru boyunca sabittir. Çok uzun bir boru içi akış en sonunda tam gelişmiş hale gelir. Bu tür bir akışta hız profili boru boyunca aynı kalır. Şekilde gösterildiği gibi akışkan ve boru çeperi arasındaki sürtünme kuvvetlerinden dolayı boru içinde kayma gerilmesi  $\tau_w$  oluşur, Ayrıca borunun içinde kayma gerilmesi sabit değildir. Borunun iç çeperi boyunca sabit bir ortalama pürüzlülük yüksekliği  $\varepsilon$  kabul edelim. Gerçekte boru boyunca sabit olmayan tek parametre basınçtır. Sürtünmeyi yenmesi için akışkanı itmesi gereken basınç, boru boyunca (doğrusal olarak) azalmalıdır Kayma gerilmesi  $\tau_w$  ile problemdeki diğer parametreler arasında boyutsuz bir ilişki oluştururuz.

**ÇÖZÜM:** Kayma gerilmesi ile diğer parametreler arasında boyutsuz bir ilişki oluşturacağız.

**Kabuller:** 1) Akış tam gelişmiştir. 2) Akışkan sıkıştırılmazdır. 3) Problemdeki diğer parametreler önemli değildir.

**Analiz:** Boyutsuz parametreleri elde etmek için tekrarlayan değişkenlerin adım adım yöntemi uygulanacaktır.



Borunun iç çeperindeki sürtünme. Boru çeperindeki kayma gerilmesi  $\tau_w$  ortalama akışkan hızı  $V$  ortalama çeper pürüzlülük yüksekliği  $\varepsilon$ , akışkan yoğunluğu  $\rho$ , akışkan viskozitesi  $\mu$  ve boru iç çapı  $D$ 'nin bir fonksiyonudur.

**Adım 1:** Problemden altı tane sabit ve değişken vardır  $n = 6$ . Bağımlı değişken, bağımsız değişkenler ve sabitlerin fonksiyonu olacak şekilde fonksiyon halinde listelenir:

$$\tau_w = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D) \quad n = 6$$

**Adım 2:** Her bir parametrenin ana boyutları liste halinde yazılır. Kayma gerilmesinin birim alanındaki kuvvet olduğuna dikkat ediniz. Dolayısıyla, basınç ile aynı boyutlara sahiptir.

$\tau_w$	$V$	$\varepsilon$	$\rho$	$\mu$	$D$
$\{m^1L^{-1}t^{-2}\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1\}$

**Adım 3:** İlk tahmin olarak  $j$ 'yi problemdeki ana boyutların sayısı (m, L ve t) olarak alalım.  $j = 3$

Eğer  $j$ 'nin bu değeri doğru ise, beklenen  $j$ 'lerin sayısı  $k=n-j= 6-3 = 3$  olur.

**Adım 4:**  $j= 3$  olduğu için üç tane tekrarlayan parametre seçelim. Tablo 7-3'te verilen önemli noktaları takip ettiğimizde, bağımlı değişken olan  $\tau_w$ 'yi alamayacağımız ortadadır. Boyutları aynı olduğu için  $\varepsilon$  ve  $D$ 'nin her ikisini birden seçemeyiz.  $\mu$  veya  $\varepsilon$ 'un bütün  $\Pi$  'lerde görünmesi istenmez. Bunlardan dolayı tekrarlayan parametreler için en iyi seçenek  $V$ ,  $D$  ve  $\rho$  'dur.  
Tekrarlayan parametreler:  $V$ ,  $D$  ve  $\rho$

**Adım 5:** Bağımlı  $\Pi$  oluşturulur:

$$\Pi_1 = \tau_w V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \quad \rightarrow \quad \{\Pi_1\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})(L^1t^{-1})^{a_1}(L^1)^{b_1}(m^1L^{-3})^{c_1}\}$$

Buradan  $a_1=-2$ ,  $b_1=0$  ve  $c_1=-1$  elde ederiz.

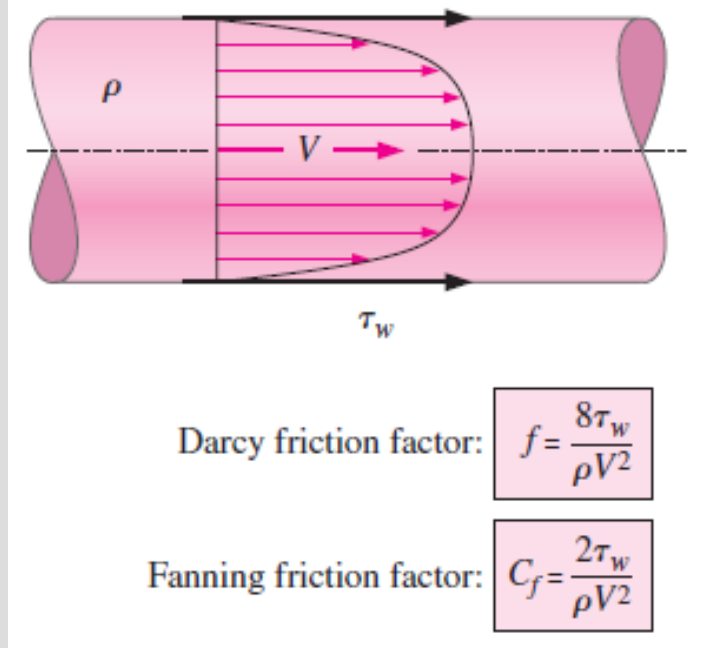
Böylece bağımlı  $\Pi$ :

$$\Pi_1 = \frac{\tau_w}{\rho V^2}$$



Tablo 7-5'ten yukarıdaki  $\Pi_1$ 'e en çok benzeyen tanınmış boyutsuz parametre, payında 8 çarpanı ile tanımlanan Darcy sürtünme faktörüdür (Şekil 7- 35). Tablo 7-4'te verilen önemli noktaları göz önüne alarak bunun üzerinde manipülasyon yapabiliriz:

$$\Pi_{1, \text{modified}} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \text{Darcy friction factor} = f$$



Boru akışları için en çok kullanılan sürtünme faktörü *Darcy sürtünme faktörü* olmasına rağmen, daha az kullanılan ve *Fanning sürtünme faktörü* olarak adlandırılan alternatif bir tanımlama da vardır. Bu ikisi arasındaki ilişki  $f = 4C_f$  olarak verilir.

Benzer yolla, iki tane daha bağımsız  $\Pi$  oluşturulur, ara işlemler okuyucuya bırakılmıştır:

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \rightarrow \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{Reynolds number} = \text{Re}$$

$$\Pi_3 = \varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3} \rightarrow \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \text{Roughness ratio}$$

**Adım 6:** Nihai fonksiyonel ilişkiyi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

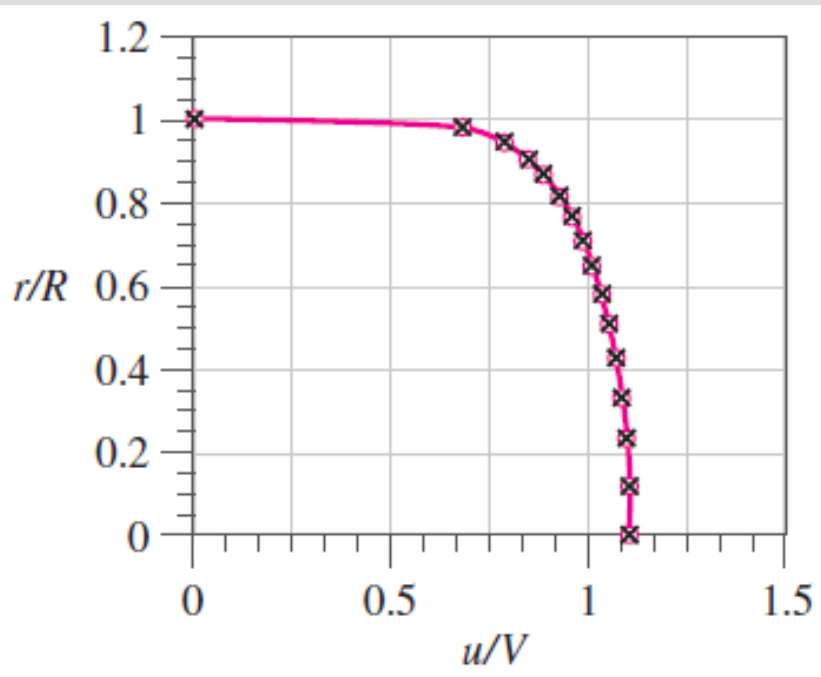
$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (1)$$

**İrdeleme:** Bu sonuç hem laminer hem de türbülanslı tam gelişmiş boru akışına uygulanır. Fakat laminer boru akışında, İkinci bağımsız  $\Pi$  (pürüzlülük oranı  $\varepsilon/D$ ) türbülanslı boru akışında olduğu kadar önemli değildir. Bu problem geometrik benzerlik ile boyut analizi arasındaki ilginç bir bağlantıyı göstermektedir,  $\varepsilon/D$  'yi eşleştirmek gereklidir çünkü bu değer problemde bağımsız  $\Pi$  'dir. Başka bir açıdan bakılırsa, pürüzlülüğü geometrik benzerlik olarak göz önüne almak, iki boru arasında geometrik benzerliği sağlamak için  $\varepsilon/D$  'yi de eşleştirmeyi gerektirir.

Örnek 9 'daki Denklem 1 'in geçerliliğini doğrulamak için, fiziksel olarak farklı ancak dinamik olarak benzer iki boru akışındaki hız profillerini ve çeper kayma gerilmelerini belirlemek üzere hesaplamalı akışkanlar dinamiğini (CFD) kullanalım. İç çapı 0.3048 m ve ortalama pürüzlülük yükseldiği 0.3048 mm olan bir boruda 300 K'de 4.42 m/s ortalama hız ile akan hava iç çapı 0.03 m ve ortalama pürüzlülük yüksekliği 0.030 mm olan bir boruda 300 K'de ve 3.09 m/s ortalama hız ile akan su. Her iki boru da yuvarlak olduğundan geometrik olarak benzer oldukları açıkça görülmektedir. Ortalama pürüzlülük yükseklikleri aynıdır (her iki durumda da  $\epsilon/D=0.0010$ ). Ayrıca dinamik olarak benzer olabilmeleri için ortalama hız ve çap değerleri dikkatlice seçilmiştir. Böylece, iki akış arasında diğer bağımsız  $\Pi$  de (Reynolds sayısı) eşleşmiş olmaktadır.

$$Re_{\text{air}} = \frac{\rho_{\text{air}} V_{\text{air}} D_{\text{air}}}{\mu_{\text{air}}} = \frac{(1.225 \text{ kg/m}^3)(14.5 \text{ ft/s})(1.00 \text{ ft})}{1.789 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \left( \frac{0.3048 \text{ m}}{\text{ft}} \right)^2 = 9.22 \times 10^4$$

$$Re_{\text{water}} = \frac{\rho_{\text{water}} V_{\text{water}} D_{\text{water}}}{\mu_{\text{water}}} = \frac{(998.2 \text{ kg/m}^3)(3.09 \text{ m/s})(0.0300 \text{ m})}{0.001003 \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 9.22 \times 10^4$$



Boru içindeki tam gelişmiş akışa ait boyutsuzlaştırılmış eksenel hız profilinin CFD kullanılarak belirlenmesi; hava (daire) ve suyun (çarpı) profilleri aynı grafik üzerinde gösterilmiştir.

**Comparison of wall shear stress and nondimensionalized wall shear stress for fully developed flow through an air pipe and a water pipe as predicted by CFD\***

Parameter	Air Flow	Water Flow
Wall shear stress	$\tau_{w, \text{air}} = 0.0557 \text{ N/m}^2$	$\tau_{w, \text{water}} = 22.2 \text{ N/m}^2$
Dimensionless wall shear stress (Darcy friction factor)	$f_{\text{air}} = \frac{8\tau_{w, \text{air}}}{\rho_{\text{air}} V_{\text{air}}^2} = 0.0186$	$f_{\text{water}} = \frac{8\tau_{w, \text{water}}}{\rho_{\text{water}} V_{\text{water}}^2} = 0.0186$

\* Data obtained with FLUENT using the standard  $k-\epsilon$  turbulence model with wall functions.

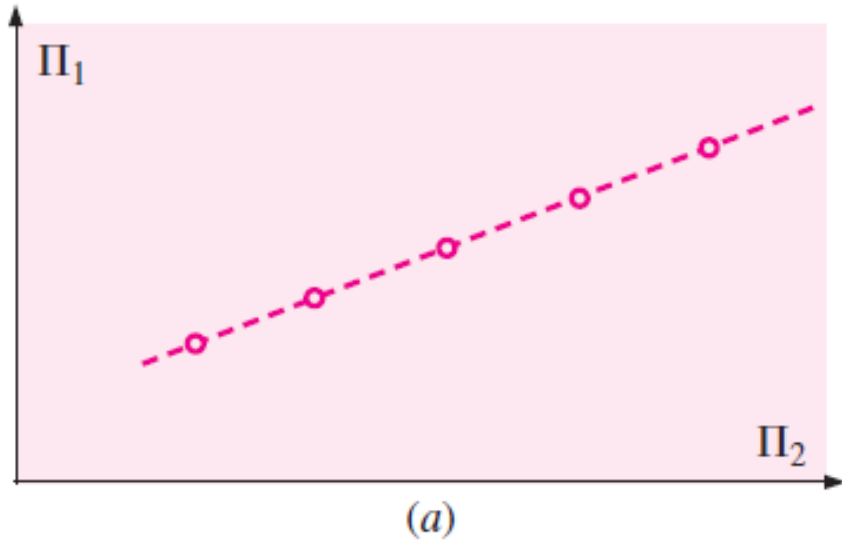
## 7-5 ■ DENEYSEL TEST VE TAM OLMAYAN BENZERLİK

Boyut analizinin en faydalı uygulamalarından biri de fiziksel ve/veya sayısal deneylerini tasarlanması ve sonuçlarının raporlanmasıdır.

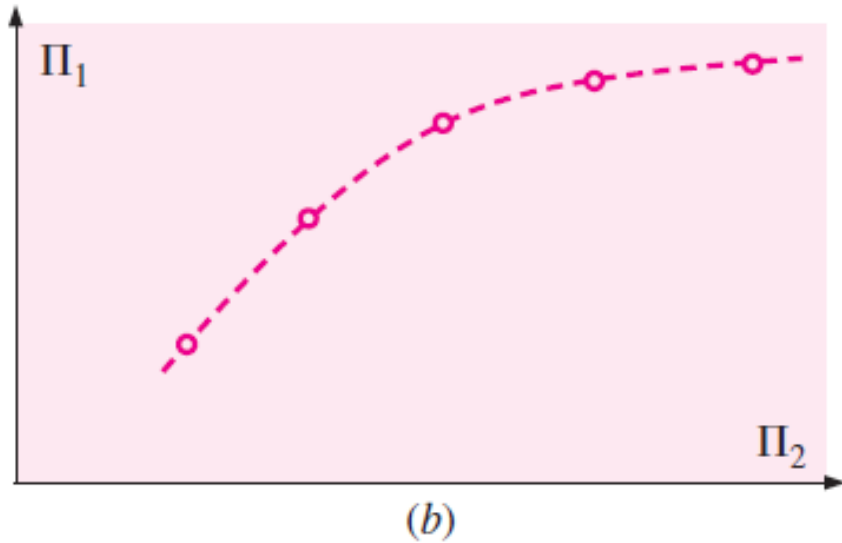
Bu bölümde, bu uygulamaların her ikisini de tartışacağız ve tam dinamik benzerliğin elde edilemeyeceği durumlara işaret edeceğiz.

### Bir Deneyin Kurulumu ve Deneysel Veriler Arasındaki Korelasyon

Genel bir örnek olarak, beş tane asıl parametrenin olduğu (bir tanesi bağımlı parametre olmak üzere) bir problemi ele alalım. Bu dört bağımsız parametrenin her birinin birkaç seviyesinin olası tüm kombinasyonları test edilerek bir dizi deney (buna tam faktöriyel test matrisi denir) yapılmaktadır. Dört bağımsız parametrenin her birinin beş seviyeli tam faktöriyel testi  $5^4 = 625$  deney gerektirir. Deneysel tasarım teknikleri, test matrislerinin boyutlarını önemli ölçüde azaltabilirken, gereken deney sayısı hala fazla olabilir. Fakat problemde üç ana boyutun verildiğini kabul ederek parametre sayısını beşten ikiye ( $k=5-3=2$  tane boyutsuz II grubu), yani bağımsız parametrelerin sayısını dörtten bire indirebiliriz. Böylece aynı çözüm için (her bir bağımsız parametrenin beş deneme seviyesi) sadece toplamı  $5^1 = 5$  deney yapmamız gerekecektir. 625 deney yerine 5 deney yapmanın maliyet açısından daha uygun olduğunu anlamak için dahi olmaya gerek yoktur.



(a)



(b)

İki-  $\Pi$  problemi için bağımlı boyutsuz parametreyi ( $\Pi_1$ ) bağımsız boyutsuz parametrenin ( $\Pi_2$ ) fonksiyonu olarak çizilir. Ortaya çıkan grafik (a) doğrusal veya (b) eğrisel olabilir. Her iki durumda da  $\Pi$  'ler arasındaki ilişkiyi belirlemek için regresyon veya eğri uydurma teknikleri kullanılabilir.

Eğer problemde ikiden fazla  $\Pi$  varsa (üç-  $\Pi$  veya dört-  $\Pi$  'li problem vs.) bağımlı  $\Pi$  ile bağımsız  $\Pi$ 'ler arasındaki ilişkiyi bulmak için test matrisi oluşturmamız gerekir. Çoğu durumda bağımlı  $\Pi$ 'lerin bir veya daha fazlasının etkilerinin ihmal edilebilir olduğu görülür. Bundan dolayı bunlar boyutsuz parametre listesinden çıkarılabilir.

## Tam olmayan Benzerlik

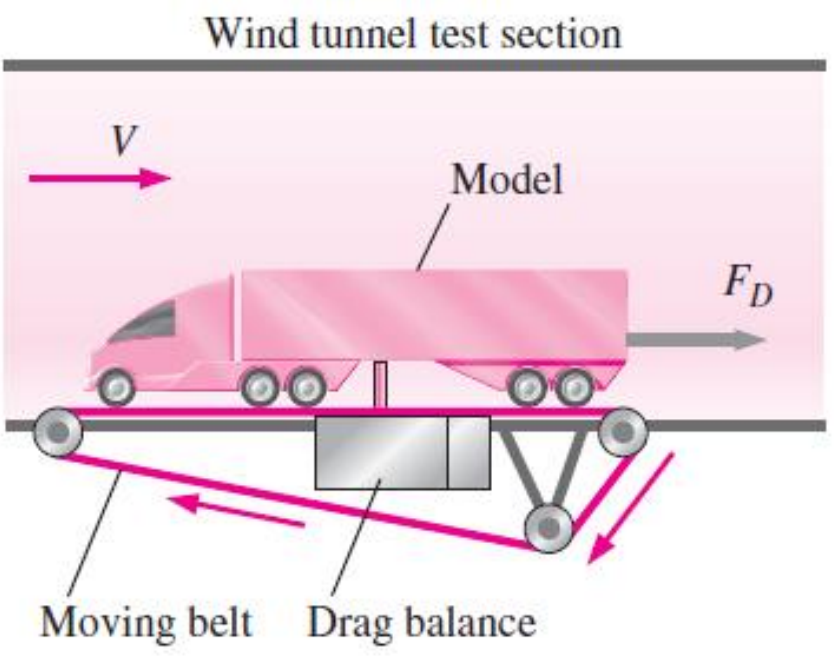
Boyutsuz  $\Pi$  gruplarının kalem ve kağıt kullanarak, tekrarlayan değişkenler yönteminin doğrudan uygulanmasıyla ile kolayca elde edilebileceğine dair birkaç örnek gördük.

Aslında yeteri kadar uygulama yaptıktan sonra  $\Pi$  'leri bazen aklınızdan veya bir mektup zarfının arkasında işlem yaparak bile kolayca elde edebilmelisiniz.

Ne yazık ki boyut analizimizin sonuçlarını deneysel verilere uygulama yoluna gittiğimizde sık sık başka bir durum ile karşılaşırız. Buradaki problem şudur: Geometrik benzerliği elde etmek için çok dikkatli davranmış olsak bile, modelin tüm  $\Pi$  'lerini prototipte bunlara karşılık gelen  $\Pi$  'lerle eşleştirmek her zaman mümkün değildir. Bu duruma **tam olmayan benzerlik** denir.

Neyse ki bazı tam olmayan benzerlik durumlarında tam ölçekli kestirimler elde etmek için model testlerini ekstrapolasyon yapabiliriz.

# Rüzgar Tüneli Testi



Tam olmayan benzerliği, rüzgar tünelinde bulunan model tır üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetinin ölçülmesi probleminde açıklayalım.

Model 1/16 ölçeklidir. Yan aynalar, çamurluklar gibi ayrıntılar olmasa bile modelimiz prototipe geometrik olarak benzemektedir.

Model tırın uzunluğu 0.991 m'dir.

Tam ölçekli prototipin 15.9 m'lik uzunluğuna karşılık gelmektedir.

Model tır, maksimum hızı 70 m/s olan bir rüzgar tünelinde test edilecektir.

Rüzgar tünelinin test bölümünün yüksekliği 1.0 m ve genişliği 1.2 m olup, duvarların akışa etkide bulunması veya blokaj etkileri konusunda endişelenmeye gerek bırakmayacak şekilde modeli barındıracak kadar büyüktür.

Zemin düzleminde direnç terazisi ve yürüyen bant bulunan bir rüzgar tünelindeki model tıra etkiyen aerodinamik direncin ölçümü.

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = Re_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

$$V_m = V_p \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left( \frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left( \frac{L_p}{L_m} \right) = (26.8 \text{ m/s})(1)(1) \left( \frac{16}{1} \right) = 429 \text{ m/s}$$



Model ve prototip arasındaki Reynolds sayısını eşleştirmek için rüzgar tüneli 429 m/s (üç anlamlı basamağa göre) hızında çalıştırılmalıdır. Bunu bu rüzgar tüneline gerçekleştirmek mümkün değildir.

O zaman ne yapmalıyız? Birkaç seçenek bulunmaktadır:

(1) Eğer daha büyük rüzgar tünelimiz varsa daha büyük bir model ile test yapabiliriz. Otomobil imalatçıları çok büyük rüzgar tünellerinde özellikle otomobiller için 3/8 ölçekli modelleri, tırlar ve otobüsler için 1/8 ölçekli modelleri test ederler.

(2) Model testleri için farklı akışkan kullanabiliriz. Örneğin su tünelleri, aynı ebattaki rüzgar tünellerinde elde edilebilecek Reynolds sayılarının çok daha üzerine çıkabilir. Fakat su tünellerinin inşa edilmesi ve çalıştırılması çok daha pahalıdır.

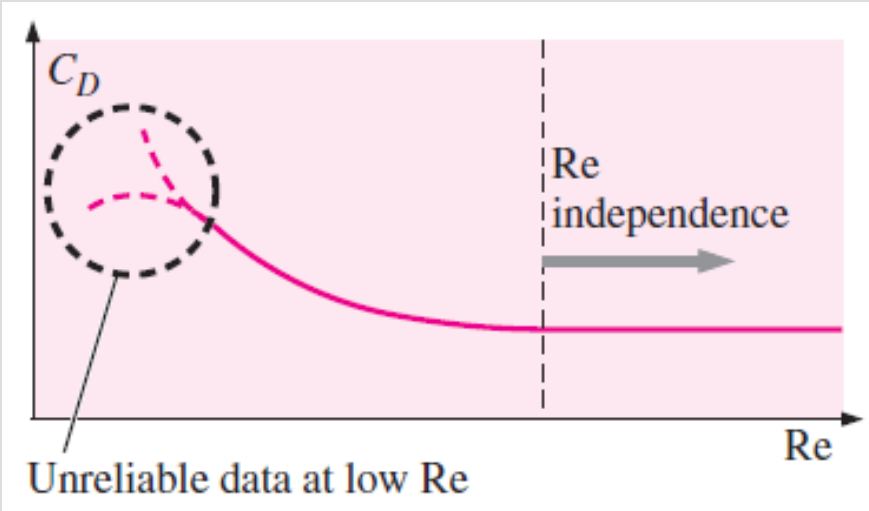
(3) Maksimum Reynolds sayısı kapasitesini arttırmak için rüzgar tüneline basıncı arttırabilir ve/veya hava sıcaklığını ayarlayabiliriz. Bu yöntemler yardımcı olabilir ama yine de Reynolds sayısındaki artış sınırlı kalır.

(4) Eğer yukarıdakilerin hepsi de başarısız olursa, rüzgar tüneli maksimum hız civarındaki birkaç hızda çalıştırabilir ve daha sonra da sonuçlarımızı tam ölçekli Reynolds sayılarını hesaplamak için kullanabiliriz.

Neyse ki çoğu rüzgar tüneli testleri için son seçenek uygulanabilir.



Langley tam ölçekli rüzgar tüneli (LTRT), tam ölçekli taşıtların test edilebileceği kadar büyüktür.



Birçok cisim için direnç katsayısı Reynolds sayısının bir eşik değerinden sonra sabitleşir. Bu şanslı duruma *Reynolds sayısı bağımsızlığı* denir. Bu durum, deney imkanlarımızın dışındaki bölgelerde prototip Reynolds sayısını ekstrapolasyon yaparak bulmamıza olanak sağlar.

## Örnek 10: Model Tıra Ait Rüzgar Tüneli Ölçümleri

Şekilde gösterildiği gibi, rüzgar tünelinde 1/16 ölçekli model tır (18 tekerlekli) test edilmektedir. Model tırın uzunluğu 0.991 m, yüksekliği 0.257 m ve genişliği 0.159 m 'dir. Testler sırasında yürüyen zemin bandının hızı, test bölümünde hareket eden havanın hızı ile daima aynı olacak şekilde ayarlanmıştır. Aerodinamik direnç kuvveti  $F_D$  rüzgar tüneli hızının fonksiyonu olarak ölçülmüş ve deney sonuçları Tablo 7-7 'de verilmiştir. Direnç katsayısı  $C_D$  'yi Reynolds sayısının fonksiyonu olarak çiziniz. Burada  $C_D$  'nin hesaplanması için kullanılan alan, model tırın ön bakış alanıdır (modelin yukarı akımındaki akış yönünden bakıldığında görülen alan) ve  $Re$ 'nin hesaplanması için kullanılan uzunluk ölçeği tırın genişliği  $W$  'dir.

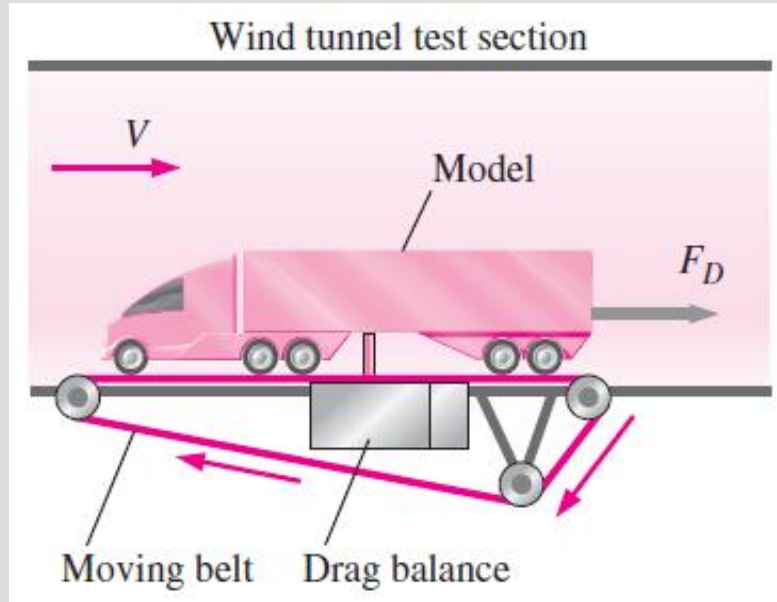
Buna göre dinamik benzerlik elde edilmiş midir?

Rüzgar tüneli testinde Reynolds sayısının bağımsızlığı sağlanmış mıdır?

Karayolunda 26.8 m/s'lik hızla giden prototip tırın üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetini hesaplayınız. Prototip 3 araba üzerinde ve rüzgar tünelinde akan havanın 25°C'de ve standart atmosferik basınçta olduğunu kabul ediniz.

**Kabuller:** 1) Model tır, prototip tıra geometrik olarak benzerdir. 2) Model tırı tutan destek üzerinde aerodinamik direnç ihmal edilebilir.

**Properties** For air at atmospheric pressure and at  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$  and  $\mu = 1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ .



Zemin düzleminde direnç terazisi ve yürüyen bant bulunan bir rüzgar tünelindeki model tıra etkiyen aerodinamik direncin ölçümü.

Analiz: Tablo 7-7'de listelenen son veri noktası için (en yüksek rüzgar tüneli hızı)  $C_D$  ve  $Re$ 'yi hesaplayalım:

$$C_{D,m} = \frac{F_{D,m}}{\frac{1}{2} \rho_m V_m^2 A_m} = \frac{89.9 \text{ N}}{\frac{1}{2} (1.184 \text{ kg/m}^3) (70 \text{ m/s})^2 (0.159 \text{ m}) (0.257 \text{ m})} \left( \frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right)$$

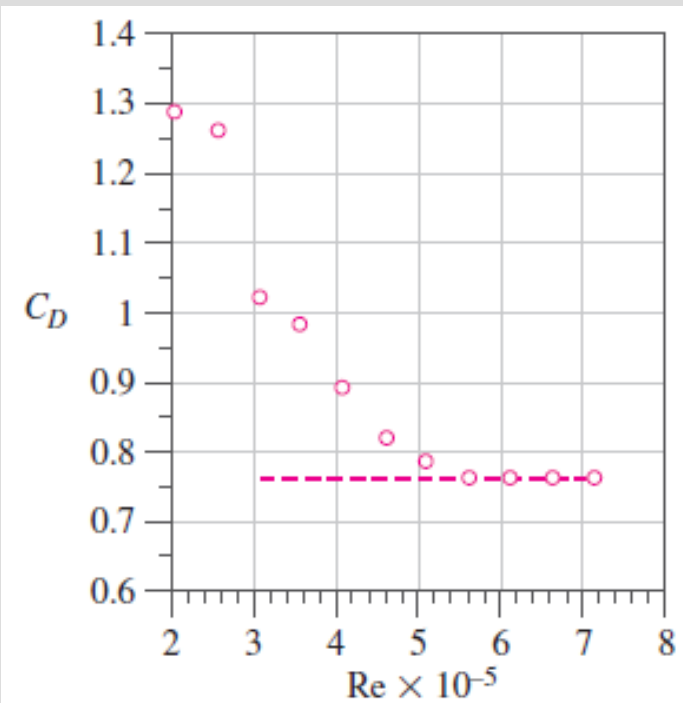
$$= 0.758$$

ve

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m W_m}{\mu_m} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3) (70 \text{ m/s}) (0.159 \text{ m})}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 7.13 \times 10^5 \quad (1)$$

Wind tunnel data: aerodynamic drag force on a model truck as a function of wind tunnel speed

$V$ , m/s	$F_D$ , N
20	12.4
25	19.0
30	22.1
35	29.0
40	34.3
45	39.9
50	47.2
55	55.5
60	66.0
65	77.6
70	89.9



Reynolds sayısının fonksiyonu olarak aerodinamik direnç katsayısı. Sonuçlar model tır üzerinden alınan rüzgar tüneli test verilerinden hesaplanmıştır.

Bu işlemleri Tablo 7-7'deki tüm veri noktaları için tekrarlayıp ve  $C_D$  -Re değişimini çizebiliriz. Peki dinamik benzerliği elde etmiş olduk mu? Model ve prototip arasında geometrik i benzerlik vardır ancak prototip tırın Reynolds sayısı,

$$Re_p = \frac{\rho_p V_p W_p}{\mu_p} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3)(26.8 \text{ m/s}) [16(0.159 \text{ m})]}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 4.37 \times 10^6 \quad (2)$$

olup prototipin genişliği model genişliğinin 16 katı olarak belirtilmiştir. Denklem 1 ve 2 karşılaştırıldığında, prototipin Reynolds sayısının modelin Reynolds sayısının altı katından daha büyük olduğu görülür. Problemdaki bağımsız  $\Pi$  'leri eşleştiremediğimiz için dinamik benzerlik elde edilememiştir.

Acaba Reynolds sayısı bağımsızlığı elde edilmiş midir? Şekil-7-41 incelendiğinde,  $5 \times 10^5$  'ten biraz daha büyük Re değerinde  $C_D$  'nin 0.76 civarına düşüp sabit kaldığı görülmektedir. Buna göre Reynolds sayısı bağımsızlığı gerçekten de elde edilmiştir.

Reynolds sayısı bağımsızlığını elde ettiğimize göre, Re tam ölçekli prototipteki değerine arttırılırken  $C_D$  'nin sabit kaldığını kabul ederek tam ölçekli prototip için ekstrapolasyon yapabiliriz.

Prototipi üzerinde hesaplanan aerodinamik direnç:

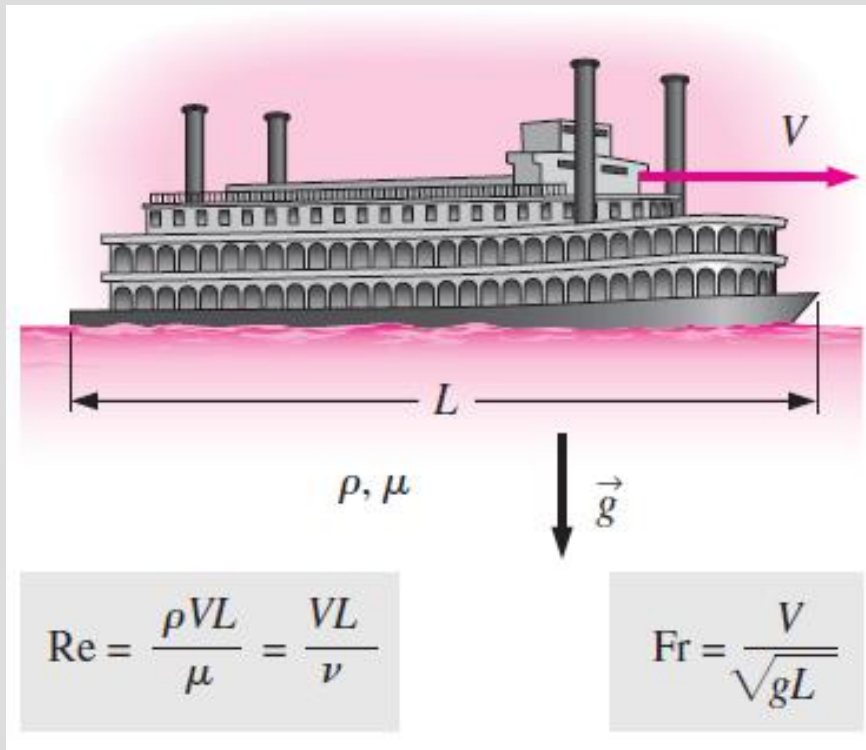
$$\begin{aligned} F_{D,p} &= \frac{1}{2} \rho_p V_p^2 A_p C_{D,p} \\ &= \frac{1}{2} (1.184 \text{ kg/m}^3) (26.8 \text{ m/s})^2 [16^2 (0.159 \text{ m}) (0.257 \text{ m})] (0.76) \left( \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) \\ &= \mathbf{3400 \text{ N}} \end{aligned}$$

## Serbest Yüzeyle Akışlar

Serbest yüzeyle akışların model testleri söz konusu olduğunda (tekne ve gemi, sel, nehir akıntıları, su kemerleri, hidroelektrik baraj tahliye kanalları dalgaların iskelelele ile etkileşimi, toprak aşınması (erozyon) vs.), model ve prototip arasındaki tam benzerliği engelleyecek sorunlar baş gösterir. Örneğin selleri incelemek amacıyla model nehir inşa edilmek istenirse, laboratuvarlardaki kısıtlı yerlerden dolayı model, prototipten birkaç yüz defa daha küçük olacaktır. Eğer modelin düşey boyuttan orantılı olarak ölçeklendirilirse, model nehrin derinliği çok sığ kalır. Bu durumda yüzey gerilimi etkileri (ve Weber sayısı) çok önemli olur ve prototip akışta ihmal edilebilir olmalarına rağmen model akışta belki akışı yönlendirebilir bile. Buna ek olarak, gerçek nehirde akışın türbülanslı olabilmesine karşın özellikle nehir yatağının eğimi prototip yatağın eğimine geometrik olarak benzer olduğunda model nehirdeki akış laminer olabilir. Bu gibi problemlerden kaçınmak için araştırmacılar çoğunlukla çarpıtılmış model kullamılar. Bu modelde modelin düşey ölçeği (nehir derinliği vs.) modelin yatay ölçeğine göre (nehir genişliği vs) abartılı yapılır. Buna ek olarak model nehrin yatak eğimi, prototipinkinden orantılı bir şekilde daha dik yapılır. Bu değişiklikler geometrik benzerlik eksikliğinden dolayı tam olmayan benzerliğe yol açar. Bu şartlar altında model testleri yine faydalıdır ancak model velilerini düzgün bir şekilde ölçeklendirmek için başka hileler (model yüzeylerini kasten pürüzlü hale getirmek gibi), deneysel düzeltmeler ve korelasyonlar gerekir.

Serbest yüzey akışlarını içeren uygulamalı problemlerin çoğunun boyut analizinde, hem Reynolds sayısı hem de Froude sayısı bağımsız  $\Pi$  grupları olarak ortaya çıkar (Şekil 7-42). Bu boyutsuz parametrelerin ikisini birden aynı anda eşleştirmek zordur (çoğu zaman imkansızdır).





Serbest yüzeyli sıvıların söz konusu olduğu çoğu akışlarda Reynolds sayısı ve Froude sayısı önemli boyutsuz parametrelerdir. Model ve prototip arasında hem  $Re$  hem de  $Fr$  'yi eşleştirmek her zaman mümkün olmadığı için bazen tam olmayan benzerliğe razı olmak durumunda kalırız.

$$Re_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p} = Re_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m}$$

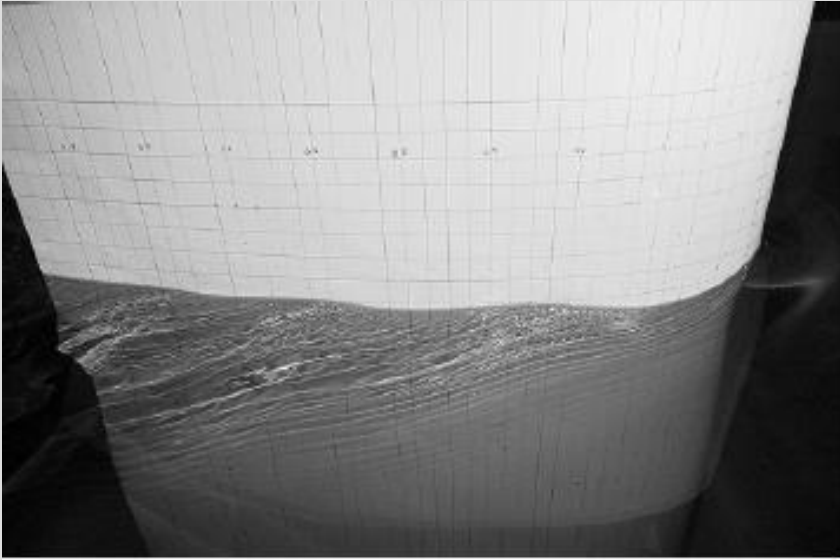
$$Fr_p = \frac{V_p}{\sqrt{g L_p}} = Fr_m = \frac{V_m}{\sqrt{g L_m}}$$

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \frac{V_p}{V_m} = \left( \frac{V_m}{V_p} \right)^2$$

*Required ratio of kinematic viscosities to match both  $Re$  and  $Fr$ :*

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left( \frac{L_m}{L_p} \right)^{3/2}$$

Tam benzerliği kesinleştirmek için kinematik viskozitesi bu denklemi sağlayan bir sıvı kullanmamız gerekir.



(a)



(c)



(b)

Çekme tankında NACA 0024 aerofoil testi Fr (a) 0.19, (b) 0.37, and (c) 0.55. Bu gibi testlerde en önemli boyutsuz parametre Froude sayısıdır.



## Örnek 11: Model Bent Ve Nehir

1990'ların sonunda ABD Ordusu Mühendisler Heyeti, Kentucky Bendi ve Barajı'nın aşağı akımında Tennessee Nehrinin akışını modellemek için bir deney tasarladılar (Şekil 7-43). Laboratuvar yerinin kısıtlamalarından dolayı uzunluk ölçeği;  $L_m/L_p=1/100$  olan bir model inşa edilmiştir. Deney için uygun olacak bir sıvı öneriniz.

Düşük bent yaklaşımıyla sefer şartlarını incelemek üzere baraj aşağıakımının 3219 m'lik mesafesi için 1:100 ölçekli bir model inşa edilmiştir. Modelde taşına savağı, güç odası ve mevcut benden ölçekli halleri bulunmaktadır. Akış seyrine ek olarak bu model, yeni bent ve istenen demiryolu ve karayolu köprülerinin konumlan ile ilgili çevresel konulan da. değerlendirmek için kullanılmıştır. Resimdeki görünüş, bent ve baraja doğru yukarı akımdan bakılan görünüşdür. Bu ölçekte, modeldeki 1 m 'lik uzunluk prototipteki 1000 m 'ye karşılık gelmektedir.



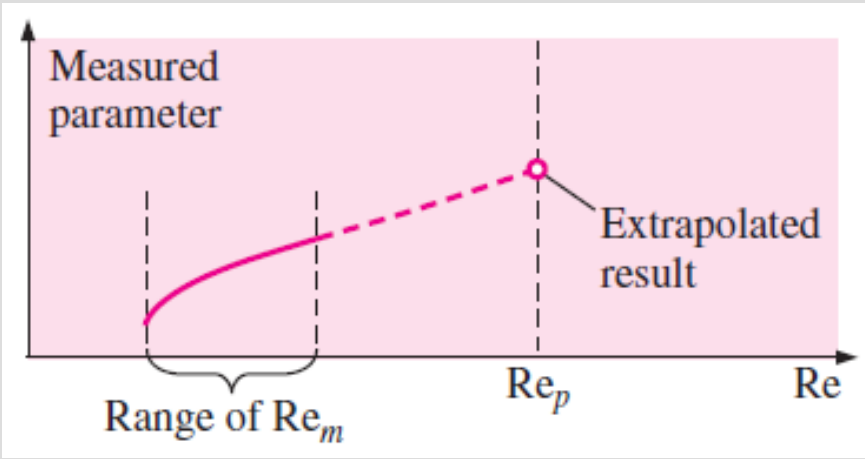
**Özellikler:** Atmosferik basınçtaki ve  $T = 20^\circ\text{C}$ 'deki su için prototipin kinematik viskozitesi  $\nu_p = 1.002 \times 10^{-6}$ 'dır.

**Analiz:** Denklem 7-24'ten gerekli kinematik viskozite,

$$\nu_m = \nu_p \left( \frac{L_m}{L_p} \right)^{3/2} = (1.002 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}) \left( \frac{1}{100} \right)^{3/2} = 1.00 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} \quad (1)$$

olarak bulunur. Viskozitesi  $1.00 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  olan bir sıvı bulmamız gerekiyor. Eklere hızlı bir şekilde göz atarsak böyle bir sıvının bulunmadığını görürüz. Sıcak suyun kinematik viskozitesi soğuk suyunkinden düşüktür fakat sadece üçte biri oranında düşüktür. Sıvı cıvanın kinematik viskozitesi çok düşüktür fakat yine de  $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  mertebesindedir. Denklem 1 'i sağlamaz, büyüklüğü iki merteye yukarıdadır. Sıvı cıva burada işe yarasa da böyle bir testte kullanmak çok pahalı ve tehlikeli olacaktır. Peki ne yapacağız? Buradan çıkaracağımız sonuç, hem Froude sayısını ve hem de Reynolds sayısını eşleştiremeyeceğimizdir. Diğer bir deyişle, bu durumda model ve prototip arasında tam benzerliği elde etmek imkansızdır. Bunun yerine tam olmayan benzerlik şartları altında elden gelenin en iyisini yapmaya çalışmak gerekir. Böyle testlerde kolaylık bakımından genelde su kullanılır.

**İrdeleme:** Bu tür deneyler için şu sonucu çıkarabiliriz. Froude sayısını eşleştirmek Reynolds sayısını eşleştirmekten daha kritiktir. Rüzgar tüneli testlerinde tartışıldığı gibi yeteri kadar yüksek Re değerlerinde Reynolds sayısı bağımsızlığı elde edilir. Reynolds sayısı bağımsızlığını elde edemezsek bile tam ölçekli Reynolds sayısı davranışını kestirmek için düşük Reynolds sayısı ile elde ettiğimiz model verilerimizi ekstrapolasyon yapabiliriz (Şekil 7-44). Bu tür ekstrapolasyon kullanımındaki yüksek güvenilirlik düzeyi, ancak benzer problemlerin ele alındığı birçok laboratuvar deneyiminden sonra elde edilebilir.



Serbest yüzeyli birçok deneyde hem Froude sayısını hem de Reynolds sayısını eşleştiremeyiz. Bununla birlikte yüksek Re sayılı prototip davranışını kestirmede çoğu zaman düşük Re sayılı model test verilerini ekstrapolasyon yaparız.

Bu bölümü deneyler ve tam olmayan benzerlik ile kapatırken, model botların, trenlerin, uçakların, binaların, canavarların vs. havada uçurulduğu veya yakıldığı Hollywood filmlerinin yapımında benzerliğin öneminden bahsetmekte fayda vardır.

Film yapımcıları küçük ölçekli yangınları ve patlamaları mümkün olduğu kadar gerçekçi yapmak için dinamik benzerliğe dikkat etmelidirler. Özel efektlerin inandırıcı görünmediği düşük maliyetli bazı filmleri hatırlarsınız.

Bu durum çoğunlukla küçük model ile tam ölçekli prototip arasındaki dinamik benzerliğin eksikliğinden kaynaklanır. Eğer modelin Froude sayısı ve/veya Reynolds sayısı prototip değerlerinden çok uzaklaşırsa özel efektler acemi gözlere bile gerçekçi görünmez.

**Bir dahaki sefere film seyrederken tam olmayan benzerliğe karşı gözlerinizi dört açın!**

# Özet

- Boyutlar ve Birimler
- Boyutsal Homojenlik
  - ✓ Denklemlerin boyutsuzlaştırılması
  - ✓ Buhar Basıncı ve Kaviteasyon
- Boyut Analizi ve Benzerlik
- Tekrarlayan değişkenler yöntemi ve Buckingham Pi Teoremi
- Deneysel Test, modelleme ve tam olmayan benzerlik
  - ✓ Bir Deneyin Kurulumu ve Deneysel Veriler Arasında Korelasyon
  - ✓ Tam Olmayan Benzerlik
  - ✓ Rüzgar Tüneli Testi
  - ✓ Serbest Yüzeyle Akışlar