AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
Uzaktan Eğitim Meslek Yüksekokulu
Harita ve Kadastro Programı

Mesleki Trigonometri

Öğr. Grv. Halil İbrahim SOLAK

27.09.2018

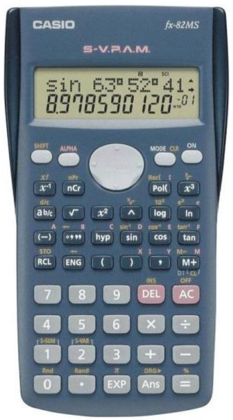
- Bu ders sizin düşünmenizi ister.
- Bu ders sizin hesaplamanızı ister.
- Bu ders sizin problemi tespit etmenizi ister.
- Bu ders sizin problemi çözmenizi ister.
- Bu ders sizin alternatif çözüm üretmenizi ister.
- Bu ders sizin mantığınızı kullanmanızı ister.
- Bu ders sizin araştırmanızı ister.
- Bu ders sizin hatayı görmenizi ister.
- Bu ders sizin sonucu irdelemenizi ister.
- Bu ders sizin önemsemenizi ve saygınızı ister.

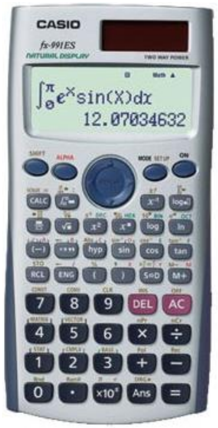
HESAP MAKİNESİNDE OLMASI GEREKEN ÖZELLİKLER

2 yıllık Harita ve Kadastro eğitiminiz süresinde kullanmak üzere bilimsel bir hesap makinesi temin etmeniz gerekmektedir. Bu hesap makinesinde olması gereken özellikler:

- Trigonometrik fonksiyon desteği (sin, cos, tan ve tersleri)
- Hafıza desteği (daha sonra kullanmak için hafızaya değer atabilme, 5-6 hafıza yeter)
- Matris desteği (3 boyutlu matris hesaplamaları yapabilmeli, 3 matris hafızası yeterli)

HESAP MAKİNESİNDE OLMASI GEREKEN ÖZELLİKLER





CASIO FX-991ES PLUS KULLANIMI

Makine üzerindeki sarı renkli fonksiyonları kullanmak için önce SHIFT tuşuna basılır sonra fonksiyon tuşuna basılır. SHIFT + OFF gibi.

Hafızadaki değerleri çağırır. ALPHA + A vb.

Köklü sayılarla işlem yapmak için kullanılır.

Negatif sayı girmek için kullanılır.

Bir açıyı derece dakika saniye olarak ya da ondalık olarak görmeyi sağlar.

Daha az işlem hatası yapmak için trigonometrik işlemlerde kullanılır.

Yön tuşları. Ekranda ve ayarlar menüsünde sağ-sol-ileri-geri geçişi sağlar.

Açma tuşu

Bir sayının -1. kuvvetini alma

Trigonometrik fonksiyon tuşları.

Ekrandaki her şeyi siler.

Her basışta ekrandaki son karakteri siler.

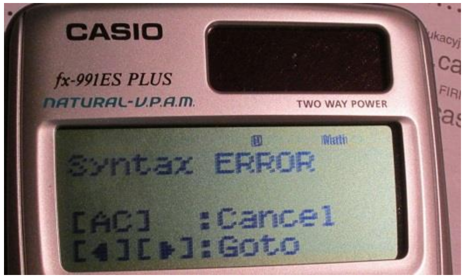
Son hesaplanan sonucu temsil eder.

ÖRNEK İŞLEMLER

	Örnek 1	Örnek 2
Hafızaya alma	SHIFT + STO + A	SHIFT + STO + B
Hafızadan çağırma	ALPHA + A	ALPHA + Y
Kapatma	SHIFT + OFF	
Derece Grad Radyan Seçimi	SHIFT + SETUP + 3	SHIFT + SETUP + 5
Matris Girme	MODE + 6 + 1 + 1	MODE + 6 + 1 + 2
Matris Çağırma	SHIFT + MATRIX + 3	SHIFT + MATRIX + 4
Matris işlemleri	SHIFT + MATRIX + 3 x SHIFT + MATRIX + 4	
Ans kullanımı	Ans x 2	Ans - 5
Derece, Dk, Sn giriş ve geçiş	12 + cik + 25 + cik + 48 + cik	cik

KARŞILAŞILABİLECEK HATALAR

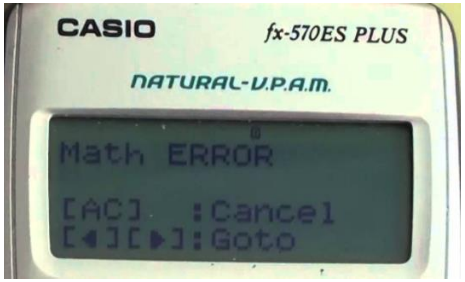
- ## Syntax Error



Yazım hatası anlamına gelir. Ekrana yazdığınız değerler ya da ifadelerde bir hata vardır.

Örnek: 45 x sin()

- ## Math Error



Matematiksel hata anlamına gelir. Ekrana yazdığınız değerler ya da ifadelerde matematiksel-mantıksal bir hata vardır.

Örnek: 20 x sin(45) / 0

- ## Ans Hatası

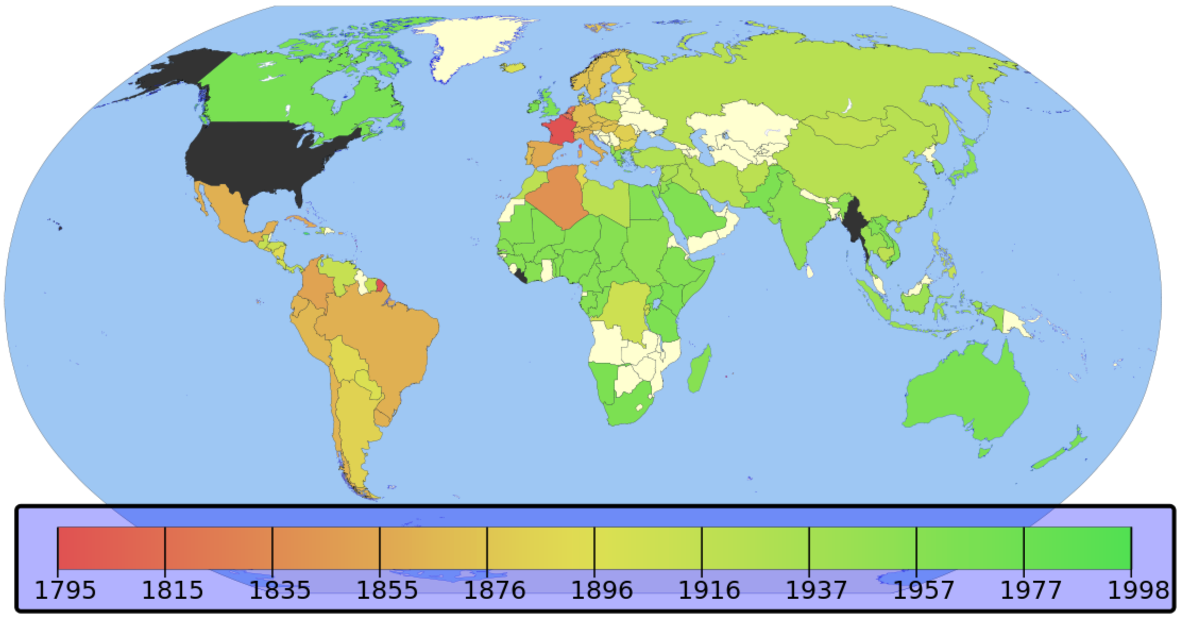
Bu hatada makine uyarı vermez, bu bir işlem hatasıdır. Hesaplanan bir denklemi tekrar kullanırken Ans ifadesi güncellenir, bu da sonucu hatalı yapabilir.

Örnek: 8x2=16 $\underset{\downarrow}{\text{Ans}}\text{x2=32}$ $\underset{\downarrow}{\text{Ans}}\text{x35=1120}$

16 32

ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Dünyanın çoğunda uzunluk birimi olarak Uluslararası Birimler Sistemi (SI) tarafından standart hale getirilen metrik ölçü sistemi kullanılmaktadır. Uluslararası Birimler Sistemi (SI) tarafından tanımlanmış olan yedi temel birimden biri uzunluk birimi metredir. Sembolü «m» ile gösterilir.



Ülkelerin metrik sisteme geçme tarihleri. (Liberya, ABD ve Burma geçmedi.)

Metrik sistemde uzunluk birimi için verilen meridyen boyunun (ekvator boyunun) yaklaşık 1/40.000.000 olan uzunluk alındığında ortaya çıkan uzunluğa metre denir. Bu metre uzunluğu sistemde diğer ana birimlerde de esas alınır. (m^2, m^3)

METRENİN ÜST KATLARI

Adı	Kısaltma	Büyüklük
yotta (yotta)	Ym	1 000 000 000 000 000 000 000 000 m
zetta (zetta)	Zm	1 000 000 000 000 000 000 000 m
eksa (exa)	Em	1 000 000 000 000 000 000 m
peta (peta)	Pm	1 000 000 000 000 000 m
tera (tera)	Tm	1 000 000 000 000 m
giga (giga)	Gm	1 000 000 000 m
mega (mega)	Mm	1 000 000 m
kilo (kilo)	km	1 000 m
hekto (hecto)	hm	100 m
deka (deca)	Dam	10 m

METRENİN AS KATLARI

Adı	Kısaltma	Büyüklük
desi (deci)	dm	1/10 m
santi (centi)	cm	1/100 m
mili (milli)	mm	1/1 000 m
mikro (micro)	µm	1/1 000 000 m
nano (nano)	nm	1/1 000 000 000 m
piko (pico)	pm	1/1 000 000 000 000 m
femto (femto)	fm	1/1 000 000 000 000 000 m
atto (atto)	am	1/1 000 000 000 000 000 000 m
zepto (zepto)	zm	1/1 000 000 000 000 000 000 000 m
yokto (yocto)	ym	1/1 000 000 000 000 000 000 000 000 m

Faktör	İsmi	Anlamı	Faktör	İsmi	Anlamı
10^{1}	deka	on	10^{-1}	desi	onda bir
10^{2}	hekto	yüz	10^{-2}	santi	yüzde bir
10^{3}	kilo	bin	10^{-3}	mili	binde bir
10^{6}	mega	milyon	10^{-6}	mikro	milyonda bir
10^{9}	giga	milyar	10^{-9}	nano	milyarda bir
10^{12}	tera	trilyon	10^{-12}	piko	trilyonda bir
10^{15}	peta	katrilyon	10^{-15}	femto	katrilyonda bir
10^{18}	eksa	kentilyon	10^{-18}	atto	kentilyonda bir
10^{21}	zetta	sekstilyon	10^{-21}	zepto	sekstilyonda bir
10^{24}	yotta	septilyon	10^{-24}	yokto	septilyonda bir

ESKİDEN KULLANILAN UZUNLUK BİRİMLERİ

Birim	Modern Denkliği
merhale	45480 m.
fersah	5685 m.
berid	227 m.
kulaç	1.89 m.
arşın	0.68 m.
endaze	0.65 m.
rubu	0.085 m.
hat	0.00263 m.

UZUNLUK BİRİMLERİ

Bazı ülkeler uzunluk birimi olarak mil kullanmaktadır.

1 milin metre cinsinden karşılığı ülkeden ülkeye değişse de ortak kullanılan değer:

1 deniz mili → 1852 metre

1 coğrafi (kara) mili → 7420,44 metre

Bu uzunlukların her ikisi de uluslararası niteliktedir.

ÖRNEK SORULAR

Örnek: Aşağıdaki uzunlukları büyükten küçüğe sıralayınız.

45 dm, 5m, 0.05 km, 750 mikro, 385 cm

ÖRNEK SORULAR

Örnek: Sekiz yüz dokuz milyar yedi yüz yirmi milyon on dört bin kırk beş metreyi kilometre cinsinden rakamla yazınız.

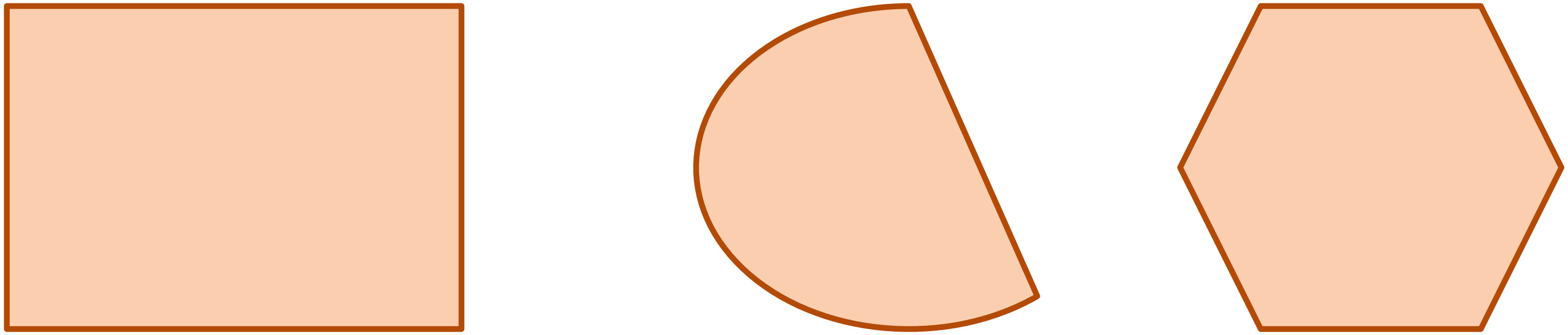
ÖRNEK SORULAR

Örnek: Bir maraton koşucusu koşuya başladıktan bir süre sonra sırayla 3500 m, 35602 dm, 3648547 cm yol kat etmiştir. Buna göre koşucunun kalan mesafesini km cinsinden hesaplayın. (Not: Maraton parkuru 45192 metredir.)

Cisimlerin yüzeylerini ölçmek için kullanılır. Alan ölçüleri de uzunluk ölçüleri gibi metre sistemine göre düzenlenmiştir. Alan ölçüsü birimi metre karedir, m^2 şeklinde gösterilir.

Kenar uzunluğu 1 metre olan karenin alanı 1 m^2 dir.

Alan ölçüleri için uzunluk ölçülerinde olduğu gibi kullanılan ölçüler yoktur, ölçülecek yüzeyler uzunluk ölçüleri ile ölçülür ve yapılan hesaplamadan sonra alan bulunur.

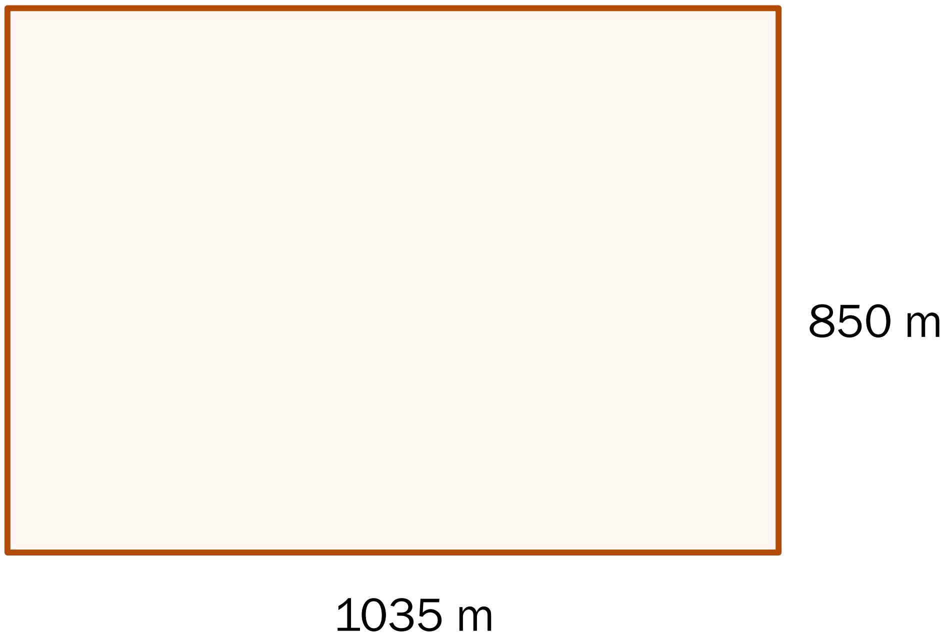


ALAN BİRİMLERİ

1.000.000	m2	=	1	Kilometre kare
10.000	m2	=	1	Hektar
1.000	m2	=	1	Dekar (Dönüm)
100	m2	=	1	Ar
1	m2	=	1	Metre kare
0.01	m2	=	1	Desimetre kare
0.0001	m2	=	1	Santimetre kare
0.000001	m2	=	1	Milimetre kare

Alan birimleri uzunluk birimine bağlı olarak **m2**'dir.

Örnek: Aşağıdaki dikdörtgenin alanını m², dekar, hektar cinsinden hesaplayın.



ÖRNEK SORULAR

Örnek: 40 hektarı m^2, km^2, dekar ve cm^2 cinsinden hesaplayın.

ÖRNEK SORULAR

Örnek: 11 ha, 1125 m^2, 0,965 km^2, 10 dekar ve 31554 cm^2 alanlarını küçükten büyüğe sıralayın.

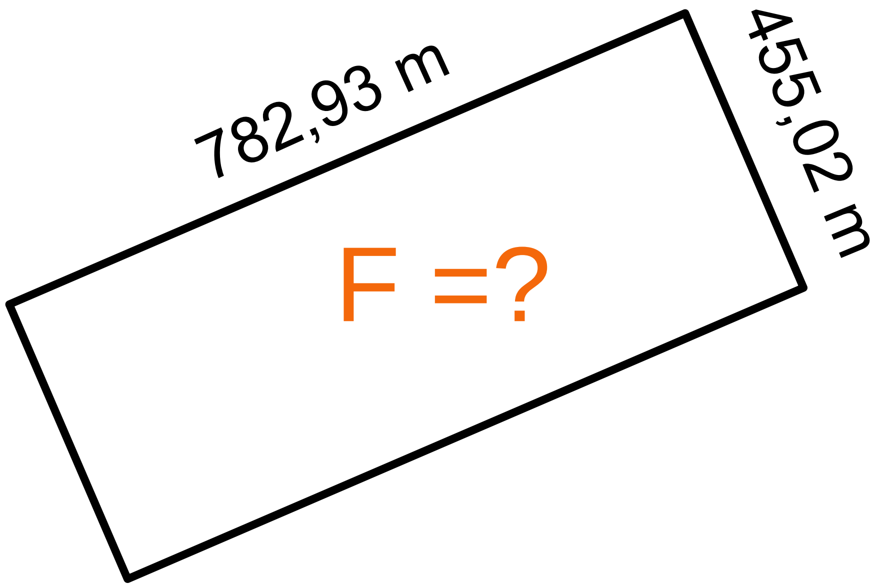
ÖRNEK SORULAR

Örnek: 1 haritacı A noktasından Kuzeybatı yönüne doğru 245m gidiyor ve Güneybatı yönüne dönerek 952 metre daha gidiyor. Daha sonra ise sırayla Güneydoğu yönüne 321, Kuzeydoğu yönüne 952 ve Kuzeybatı yönüne 76 m gidiyor.

Buna göre haritacının oluşturduğu kapalı şeklin alanı nedir?

ÖRNEK SORULAR

Dikdörtgen şeklindeki bir parselde kenarlar bilindiğine göre parselin alanı kaç m^2, km^2 hektar?



F= 782,93 m x 455,02 m

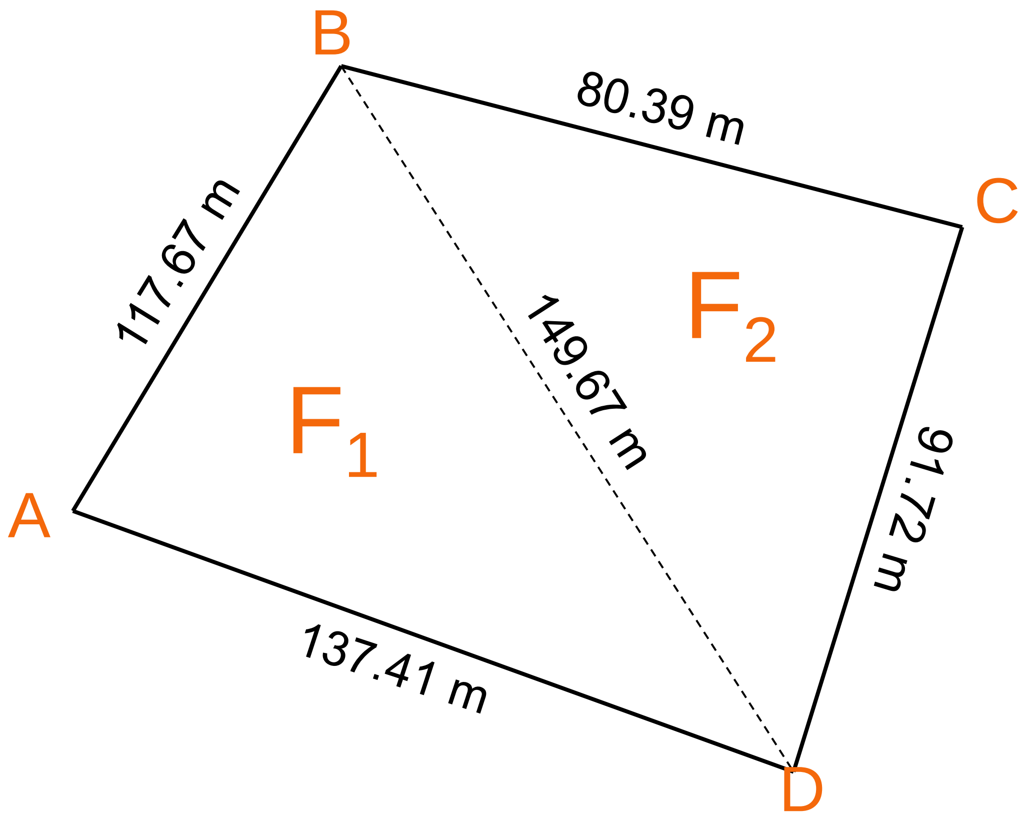
F= 35624880,86 m^2

F= 35,62488086 km^2

F= 3562,488086 hektar

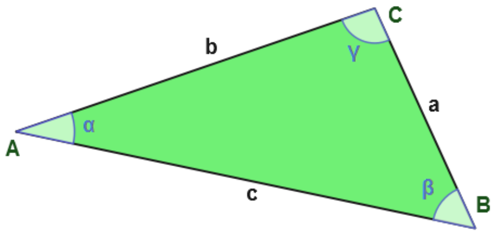
ÖRNEK SORULAR

Şekildeki dörtgen şeklindeki bir parselde ölçüler verildiğine göre parselin alanı kaç m^2, hektar ve km^2 ?



ÖRNEK SORULAR

Çözüm : Herhangi bir ABC üçgeninde alan bağıntısı;



$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s_1 = \frac{a+b+c}{2} = \frac{117.67+137.41+149.67}{2} = 202.375\ m$$

$$F_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 7661.23148\ \mathrm{m}^2$$

$$s_2 = \frac{a+b+c}{2} = \frac{80.39+91.72+149.67}{2} = 160.89\ m$$

$$F_2 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 3170.427178\ \mathrm{m}^2$$

F= F_1 + F_2 = 10831.65866 m^2

F= 0,01083165866 km^2

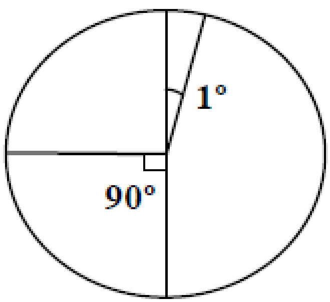
F= 1,083165866 hektar

AÇI BİRİMLERİ

Açıların ölçülmesi için ölçü birimi bir dik açıdır. Uygulamalarda işin türüne göre açı birimi olarak **Derece** ya da **Grad** sistemleri kullanılır.

Derece

Bir daireyi 360'a bölersek her bir parça **1 dereceye** (1°) karşılık gelir. Bu sistemde;



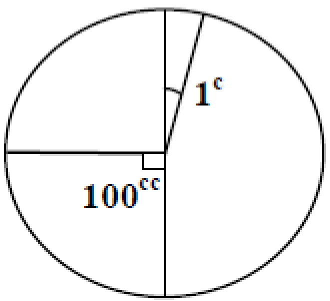
$$\text{Dik açı} = 90^{o} \quad (90 \text{ derece})$$

$$1^{o} = 100' \quad (60 \text{ derece dakikası})$$

$$1' = 100'' \quad (60 \text{ derece saniyesi})$$

Grad

Bir daireyi 400'e bölersek her bir parça **1 grad** (1g) karşılık gelir. Bu sistemde;



$$\text{Dik açı} = 100^{g} \quad (100 \; grad)$$

$$1^{g} = 100^{c} \quad (100 \text{ grad dakikası})$$

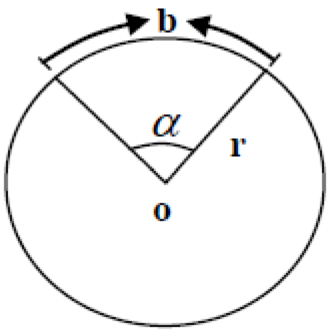
$$1^{c} = 100^{cc} \quad (100 \text{ grad saniyesi})$$

AÇI BİRİMLERİ

Uygulamalarda kullanılan diğer bir ölçü birimi **radyan**dır.

Bir çemberde yarıçap uzunluğundaki yay parçasını gören merkez açıya **1 radyan** denir.

$$\text{Radyan} = \frac{\text{Yay Uzunluğu}}{\text{Yarıçap}}$$



$$\alpha_{radyan} = \frac{b(m)}{r(m)} = birimsiz$$

Bu durumda $\mathrm{R} = \dfrac{\text{çemberin çevresi}}{\text{yarıçap}} = \dfrac{2.\pi.\mathrm{r}}{\mathrm{r}}$

$$R = 2\pi$$

MİLYEM

Bir tam çemberin 6400’de 1 parçasını gören merkez açı birimidir. Genellikle askeri amaçlı kullanım içindir.

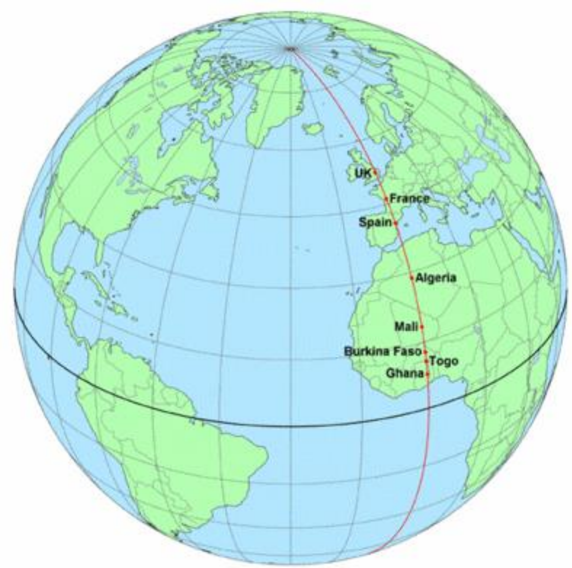
AÇI BİRİMLERİ

Derece, Grad, Radyan ve Milyem arasındaki bağıntı:

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} = \frac{M}{6400}$$

Haritacılıkta genellikle GRAD tercih edilmektedir.

ZAMAN BİRİMLERİ



Bir gök cisminin bir yerin meridyeninden iki üst geçişi arasında geçen süreye bir gün denmektedir.

Bir günün 1/24 de birine 1 saat, bir saatin 1/60 birine dakika, bir dakikanın 1/ 60 da birine de saniye denir.

Saat (h), dakika (m), saniye (s) ile gösterilir.

SI sisteminde zaman birimi saniye (s) dir.

ZAMAN – AÇI DÖNÜŞÜMÜ

Bir gök cisminin iki üst geçişi arasındaki 1 günlük zaman, açı cinsinden tam açıya 360^o yada 400^g karşılık gelmektedir. Buna göre;

24^h — 360^o

1^h — x^o

$$x^o = \frac{360^o \cdot 1^h}{24^h} = 15^o$$

$1^h = 60^m = 15 \times 60'$

$$1^m = \frac{15 \cdot 60'}{60} = 15'$$

$60^s = 15 \times 60''$

$$1^s = \frac{15 \cdot 60''}{60} = 15''$$

ÖRNEK SORULAR

$28^{\circ}6985$ açisini derece, dakika ve saniye cinsinden yaziniz.

- Derece: 28
- Dakika: 28.6985 - 28 = 0.6985 * 60 = 41.91
- Saniye: 41.91 – 41 = 0.91 * 60 = 54.6

Sonuç

$28^{\circ}41^{'}54.6^{''}$

$49^{g}3587$ açisini derece, dakika ve saniye cinsinden yaziniz.

- Derece: 49
- Dakika: 49.3587 - 49 = 0.3587 * 100 = 35.87
- Saniye: 35.87 – 35 = 0.87 * 100 = 87

Sonuç

$49^{g}35^{c}87^{cc}$

ÖRNEK SORULAR

$75^{g}6475$ açisi kaç derece ve kaç radyandir?

$$\frac{75^{g}6475}{400} = \frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

$D = 68^{\circ}08275$

$R = 0.3782375\ \pi$

$63^{\circ}05^{'}34.25^{''}$ açisini ondalik olarak yaziniz.

- Derece: 63
- Ondalık: 05 / 60 + 34.25 / 3600 = 0.0928472

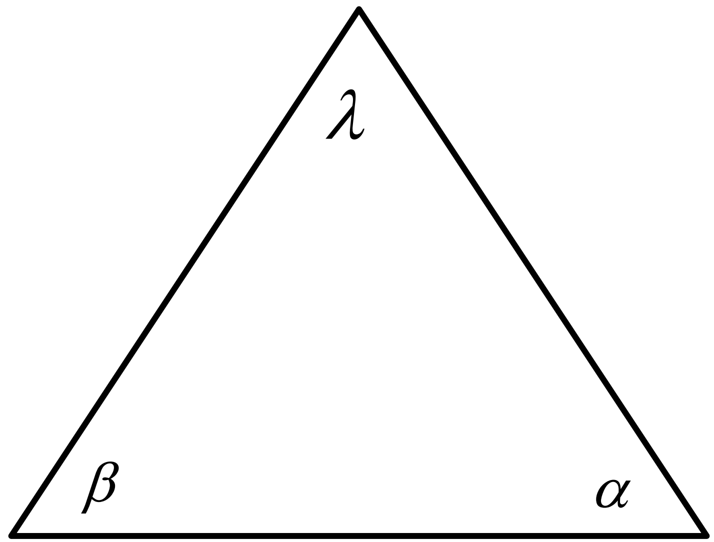
Sonuç

$63^{\circ}0928472$

ÖRNEK SORULAR

İki acisi verilen üçgenin son açisini (λ) derece, grad ve radyan cinsinden hesaplayin.

$$\alpha^{g} = 59^{g}3698 \qquad \beta^{\circ} = 78^{\circ}3569 \qquad \lambda = ?$$



ÖRNEK SORULAR

Çözüm : Üçgenin iç açilari toplami : $\alpha + \beta + \lambda = 200^{g}$

1) β° açisi α^{g} ile aynı birimde olması için grada çevrilir.

$$\frac{78^{\circ}3569}{360} = \frac{\beta^{g}}{400} \longrightarrow \beta^{g} = 87^{g}0632$$

2) λ hesaplanir .

$$59^{g}3698 + 87^{g}0632 + \lambda = 200^{g} \longrightarrow \lambda^{g} = 53^{g}5670$$

3) λ derece ve radyana donusturul ur.

$$\frac{G}{400} = \frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

$$\lambda^{\circ} = 48^{\circ}2103$$

$$\lambda^{R} = 0.267835\,\pi$$

ÖRNEK SORULAR

Yer yüzünde sabit bir noktaya bir teleskop yerleştirilmiştir. Bu teleskop aracılığıyla sabit bir meridyen üzerinde hareket eden bir gök cismi 4 saat 8 dakika boyunca takip edilmiştir. Buna göre bu süre içerisinde gök cismi kaç derecelik hareket gerçekleştirmiştir?

ÖRNEK SORULAR

Aynı meridyen üzerinde hareket eden bir gök cismi başlangıç noktası olan A'dan itibaren 189 derece hareket etmiştir. Buna göre bu cismin yaptığı hareketi yer yüzünden teleskop aracılığıyla izlemek isteyen bir kişinin kaç saat boyunca bu cismi takip etmesi gerekmektedir?

Bir dar açının trigonometrik fonksiyonları; bir dik üçgende bir dar açı ile herhangi iki kenarı arasında yazılacak oran değerleridir.

sin

cos

tan

cot

sec

cosec

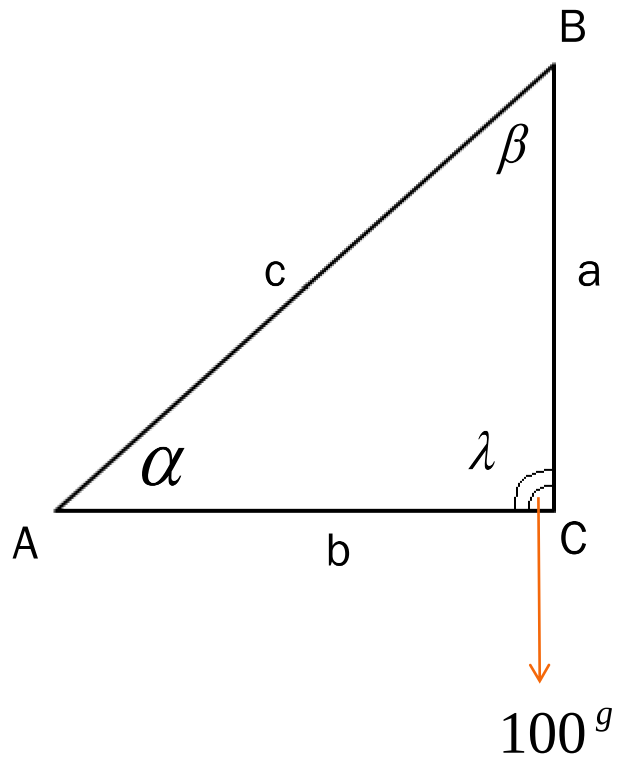
SIN – COS - TAN

Sağdaki gibi bir dik üçgende temel trigonometrik fonksiyonlar:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$



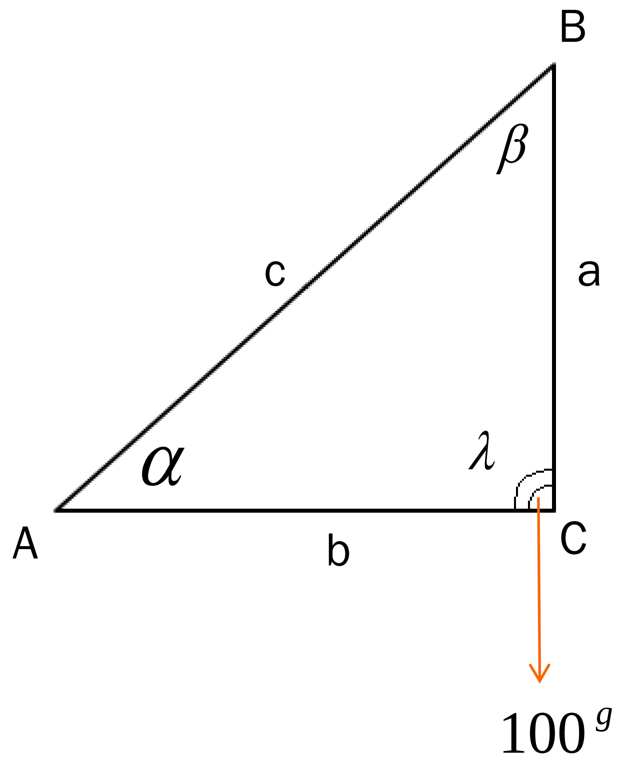
COT – SEC - COSEC

Sağdaki gibi bir dik üçgende temel trigonometrik fonksiyonlar:

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cot\beta = \frac{a}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$



ÖRNEK SORULAR

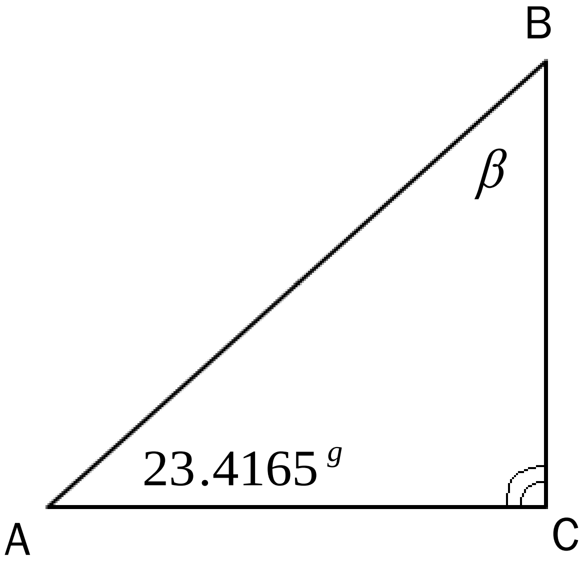
Örnek: β açısını hesaplayın ve trigonometrik fonksiyonlarını yazın.

$$\beta + 100^g + 23.4165^g = 200^g \longrightarrow \beta = 76.5835^g$$

$$\sin \beta = 0.9331114657$$

$$\cos \beta = 0.3595872532$$

$$\tan \beta = 2.594951454$$



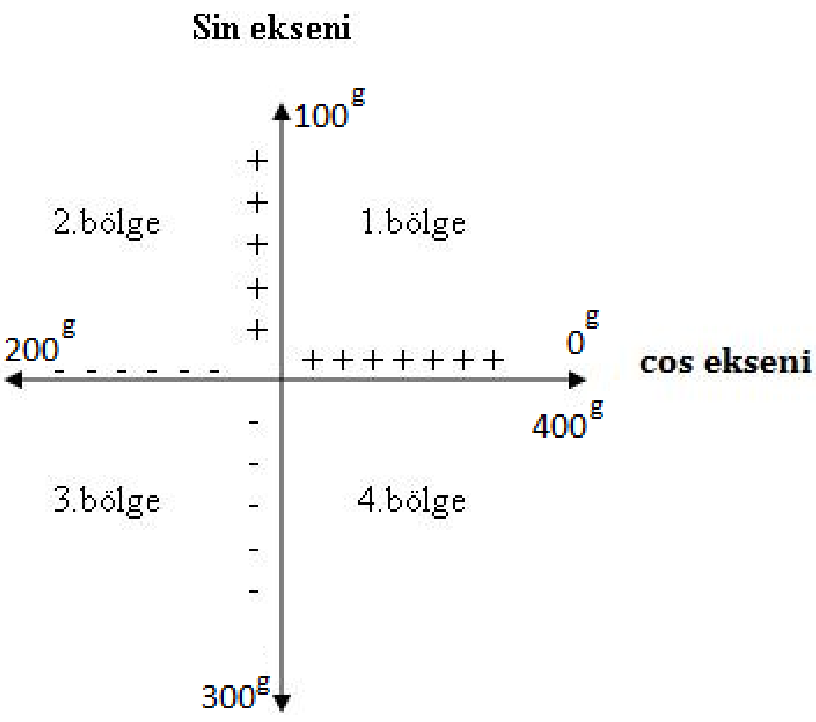
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$0^g - 100^g$ arasında 1. Bölge

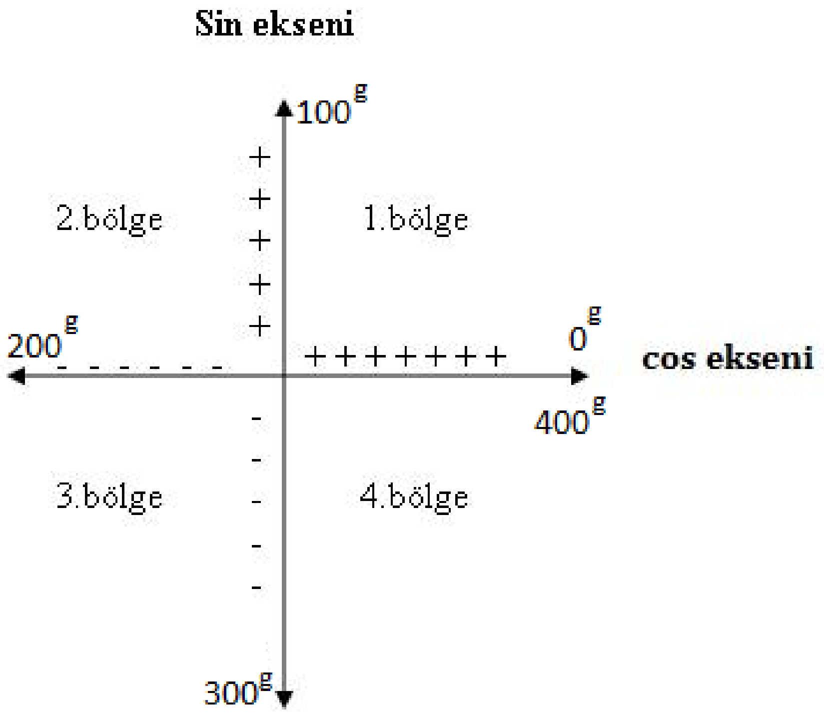
$100^g - 200^g$ arasında 2. Bölge

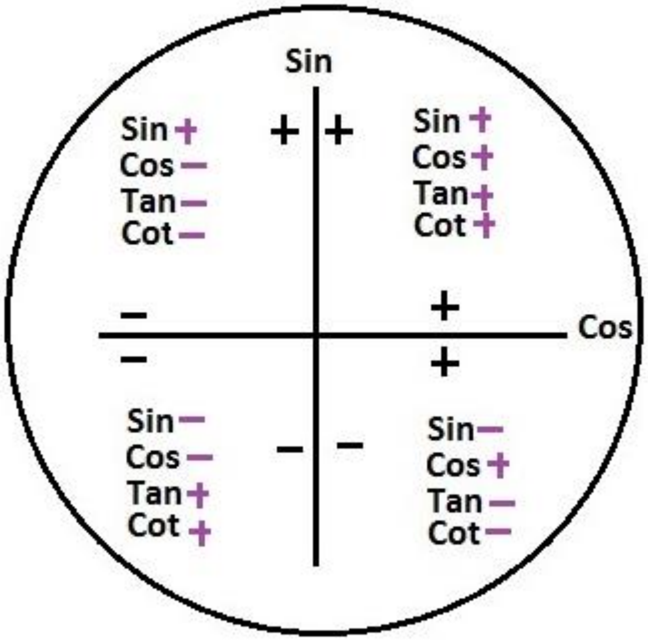
$200^g - 300^g$ arasında 3. Bölge

$300^g - 400^g$ arasında 4. Bölge



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ





sin ve cos fonksiyonları - 1 ile + 1 aralığında değer alır.

tan ve cot fonksiyonları - ∞ ile + ∞ aralığında değer alır.

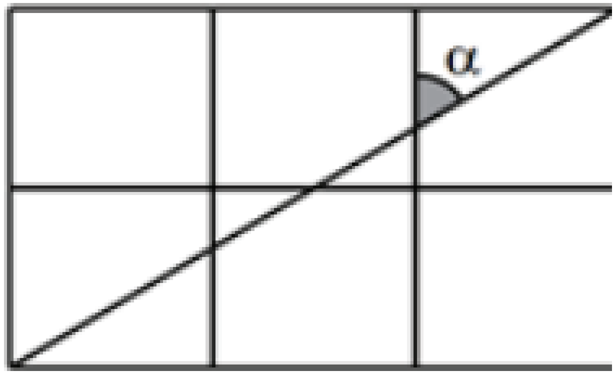
ÖZEL AÇILARIN TRİGONOMETRİK DEĞERLERİ

θ	sin(θ)	cos(θ)	tan(θ)	cot(θ)	sec(θ)	csc(θ)
0	0	1	0	-	1	-
π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
π/2	1	0		0	-	1
2π/3	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2\sqrt{3}/3$
3π/4	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
5π/6	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2
π	0	-1	0	-	-1	-

$\pi = 200^g$ ya da $\pi = 180^o$ farketmez.

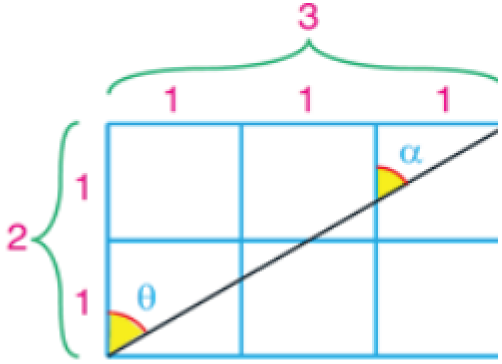
ÖRNEK SORULAR

Örnek: Aşağıdaki şekil özdeş karelerden oluştuğuna göre $\tan\alpha$ kaçtır?



ÖRNEK SORULAR

Şekil özdeş karelerden oluştuğuna göre her kenarı eşittir. Yöndeş açılardan yararlanarak aşağıdaki şekli elde etmiş oluruz.



$$\tan \alpha = \frac{3}{2}$$

ÖRNEK SORULAR

Örnek:

Yandaki açıların değerlerini ve bölgelerini belirleyin.

$\longrightarrow$

$$\sin 256^{g}$$

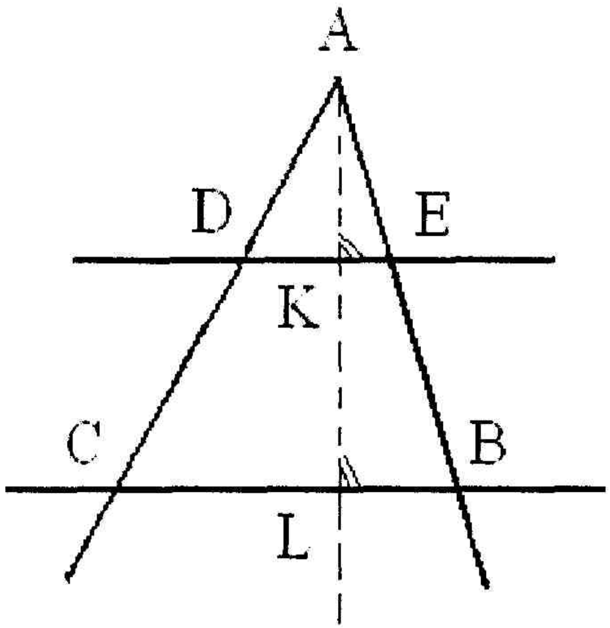
$$\cos 387^{g}$$

$$\sin 178^{g}$$

$$\cos 49^{g}$$

TALES BAĞINTISI

Birbirine paralel olan doğrular başka doğrularla kesildiklerinde ortaya çıkan şekiller üzerinde **Tales bağıntısı** yazılabilmektedir.



a) Şekilde $\overline{DE} \; // \; \overline{CB}$ ise, burada oluşmuş ABC ve AED üçgenlerinin kenar ve yükseklikleri arasında yazılacak oranlarla

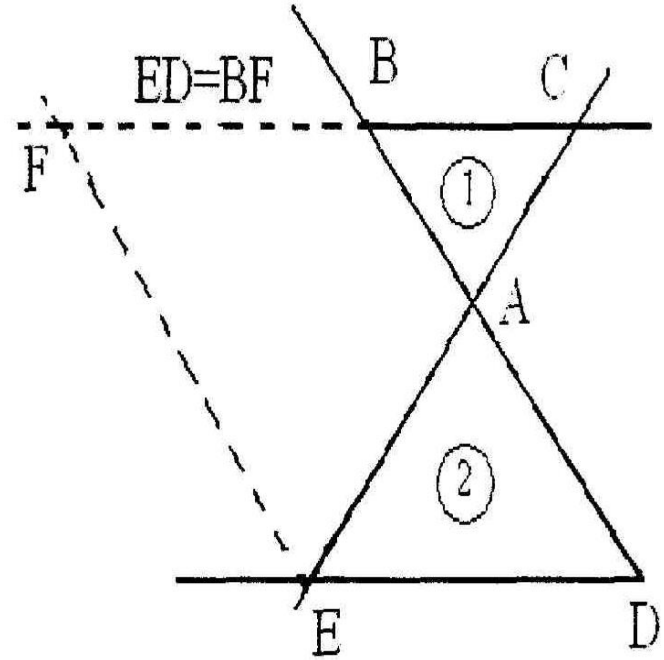
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} = k$$

Tales bağıntısı denilir

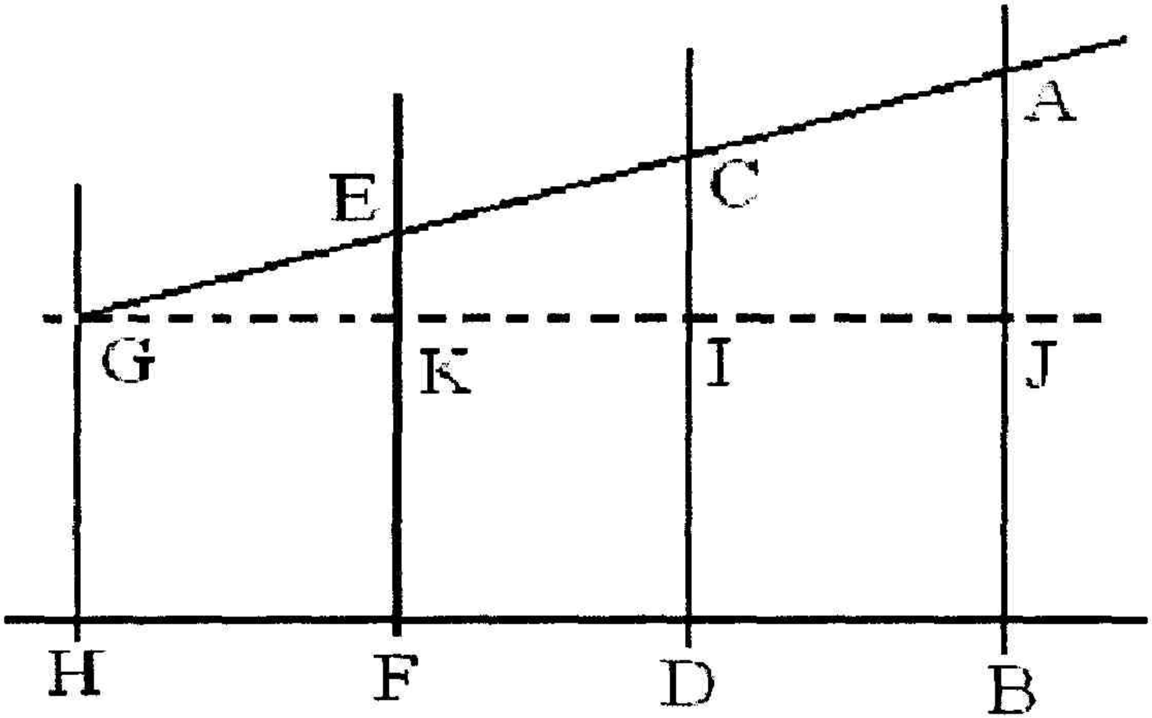
b) Şekilde $\overline{BC} // \overline{DE}$ ise, yukarıdakine benzer şekilde

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{DE}} = k$$

olarak Tales bağıntısı yazılır.



c) $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF} // \overline{GH}$ biçiminde çok sayıda birbirine paralel doğru varsa, $\overline{GJ} // \overline{HB}$ paraleli çizildiğinde, birinci durumdakine benzer olarak ilgili oranlarla;



$$\frac{\overline{GE}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{HD}},$$

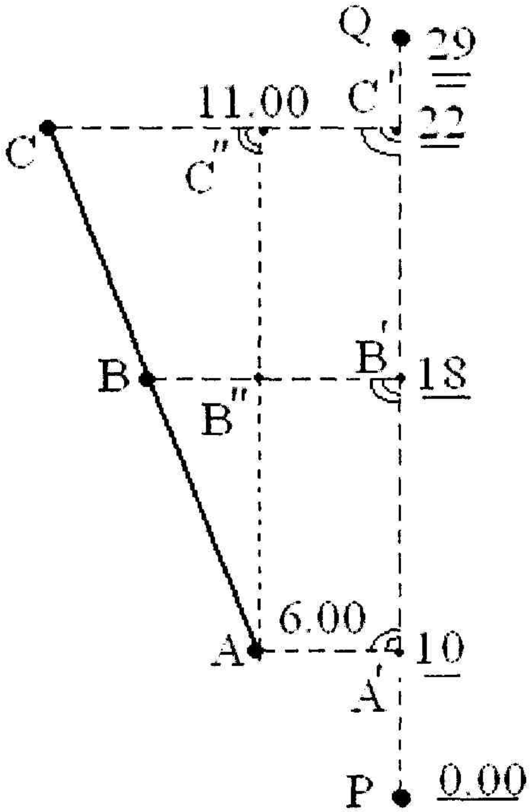
$$\frac{\overline{GE}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{HB}},$$

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DB}}$$

biçiminde de ilgili Tales bağıntısı yazılır.

Örnek; Verilen şekildeki prizmatik ölçülerde eksik olan değerleri bulunuz?

A noktasından ölçü doğrusuna paralel çizildiğinde $\overline{PQ} \,//\, \overline{AC''}$ olur. Burada;



$$\overline{A'B'} = \overline{AB''} = 8.00 \text{ m}$$

$$\overline{A'C'} = \overline{AC''} = 12.00 \text{ m}$$

$$\overline{CC''} = \overline{CC'} - \overline{AA'} = 5.00 \text{ m}$$

Pisagor bağıntısıyla,

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CC''}^2 + \overline{AC''}^2} = 13.00 \text{ m}$$

ve yazılacak Tales bağıntısıyla;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AC''}} = \frac{\overline{BB''}}{\overline{CC''}}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AB''} * \overline{AC}}{\overline{AC''}} = 8.67 \text{ m}$$

$$\overline{BB''} = \frac{\overline{AB''} * \overline{CC''}}{\overline{AC''}} = 3.33 \text{ m}$$

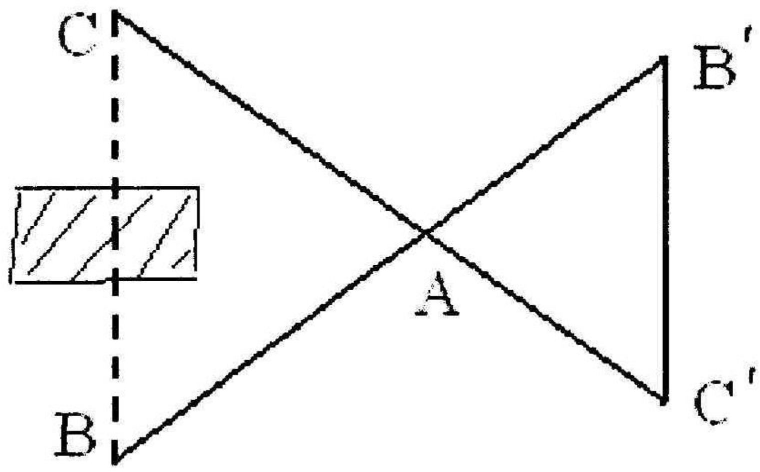
ile B noktasına ilişkin dik boyu $\overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{BB''} = 9.33\text{m}$, ve
$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 4.33$ m olarak bulunur.

Örnek; Aralarındaki engel nedeniyle doğrudan ölçülemeyen $\overline{BC}$ kenarını bulabilmek için şekildeki gibi $\overline{BC} // \overline{B'C'}$ olacak şekilde bir ölçü planında, $\overline{AB} = 180.00$ m, $\overline{AC} = 300.00$ m, $\overline{AC'} = 50.00$ m, $\overline{B'C'} = 60.00$ m ölçülmüştür.

$$\overline{BB'} = \overline{AB} + \overline{AB'},$$

$$\overline{CC'} = \overline{AC} + \overline{AC'} = 300 + 50 = 350.00 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{B'C'}}$$



Tales bağıntısıyla,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CC'}} \Rightarrow \overline{AB'} = 30.00 \text{ m}$$

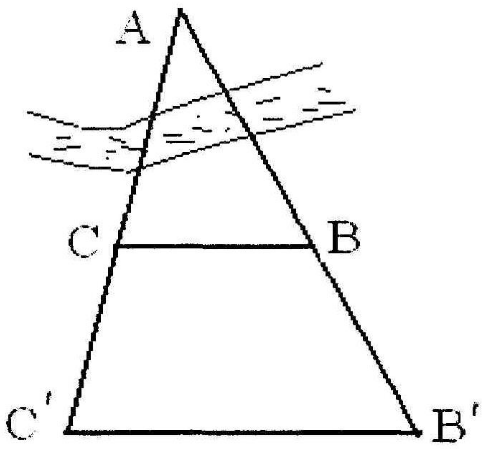
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{B'C'}} \Rightarrow \overline{BC} = 360.00 \text{ m}$$

biçiminde hesaplanır.

Örnek; Verilen şekilde, $\overline{AB}$ uzunluğu aradaki dere nedeniyle ölçülememektedir. $\overline{CB} // \overline{C'B'}$ biçiminde oluşturulan ölçü planında, $\overline{C'B'} = 225.00$ m, $\overline{CB} = 90.00$ m, $\overline{BB'} = 150.00$ m, ise $\overline{AB}$ uzunluğunu hesaplayınız?

$$\overline{AB'} = \overline{AB} + \overline{BB'} = x + 150$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$



şeklinde yazılacak Tales bağıntısıyla,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{x}{x+150} = \frac{90}{225}$$

ile

$$\overline{AB} = x = 100.00 \text{ m bulunur.}$$

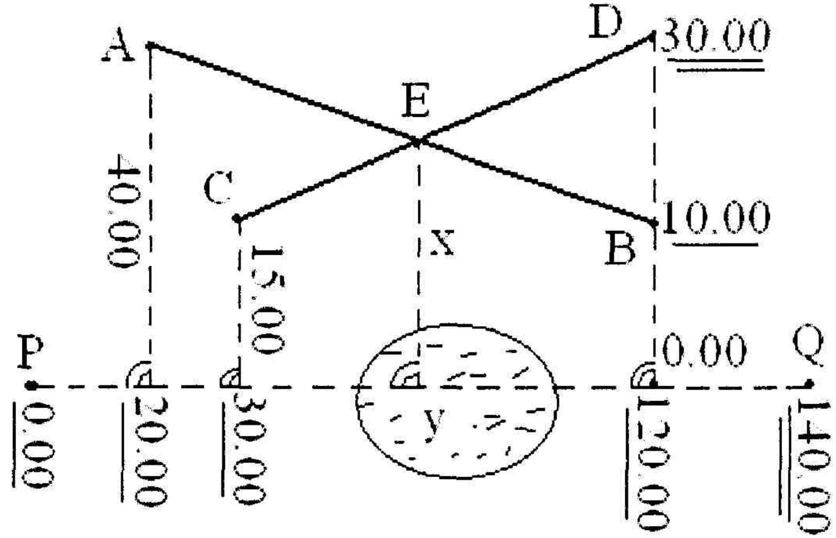
Örnek; Aşağıda verilen prizmatik alım ölçülerinde, su birikintisi nedeniyle ölçüsü yapılamayan E noktasına ilişkin dik ayağını ve dik boyunu hesaplayınız?

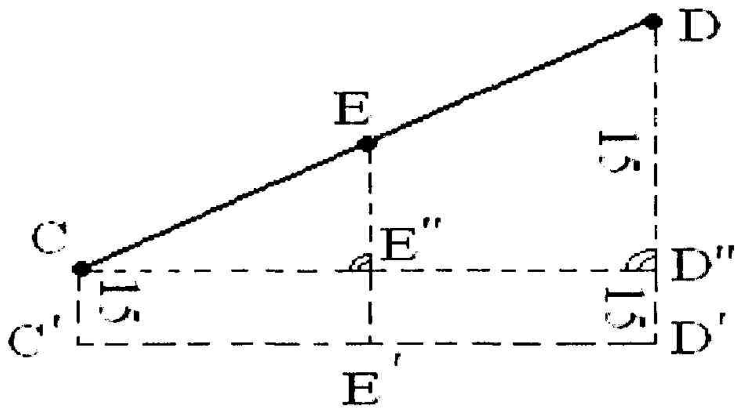
Verilen şekilde, E noktasına ilişkin x ve y cinsinden iki adet bilinmeyen bulunmaktadır. Bu iki bilinmeyen için iki adet denklem yazılır.

C noktasından PQ ölçü doğrusuna paralel çizildiğinde,

$$\overline{CD''} \mathbin{//} \overline{C'D'} \mathbin{//} \overline{PQ}$$

olur.





$\overline{DD''} = 15.00$ m,

$\overline{CD''} = 90.00$ m,

$\overline{EE''} = x - 15$,

$\overline{CE''} = y - 30$

ile burada yazılacak Tales bağıntısında;

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CE''}}{\overline{CD''}} = \frac{\overline{EE''}}{\overline{DD''}}$$

$$\frac{y-30}{90} = \frac{x-15}{15} \quad (1)$$

biçiminde ilk denklem oluşturulur.

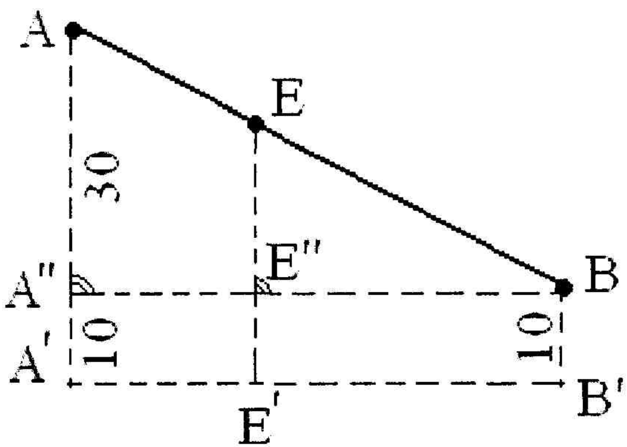
B noktasından PQ ölçü doğrusuna paralel çizildiğinde,

$\overline{BA''} \,//\, \overline{B'A'} \,//\, \overline{PQ}$ olur.

$\overline{AA''} = 30.00$ m,

$\overline{BA''} = 100.00$ m,

$\overline{EE''} = x - 10$, $\overline{BE''} = 120 - y$



ile yazılacak Tales bağıntısında

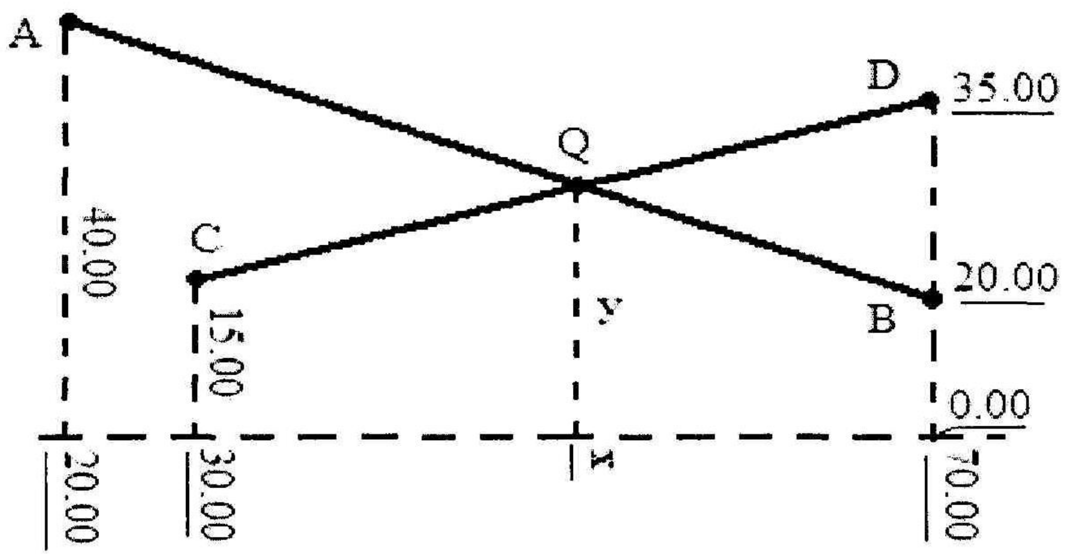
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BE''}}{\overline{BA''}} = \frac{\overline{EE''}}{\overline{AA''}}$$

$$\frac{120-y}{100} = \frac{x-10}{30} \quad (2)$$

biçiminde ikinci denklem oluşturulur.

(1) ve (2) denklemleri birlikte çözülürse, E noktasına ilişkin dik boyu x = 22.86 m, dik ayağı y = 77.16 m değerleri hesaplanır.

Örnek; Aşağıda verilen prizmatik alım ölçülerinde, engel nedeniyle ölçüsü yapılamayan T noktasına ilişkin dik ayağını ve dik boyunu hesaplayınız?



Şekilde dik ayağı x, dik boyu y olarak gösterilirse, C noktasından ölçü doğrusuna çizilecek bir paralelle yazılacak Tales bağıntısı,

$$\frac{y-15}{35-15}=\frac{x-30}{70-30}$$

ve B noktasından ölçü doğrusuna çizilecek bir paralel ile yazılacak Tales bağıntısı,

$$\frac{y-20}{40-20}=\frac{70-x}{70-20}$$

şeklinde yazılacak iki bilinmeyenli iki denklemin çözümünde ise,

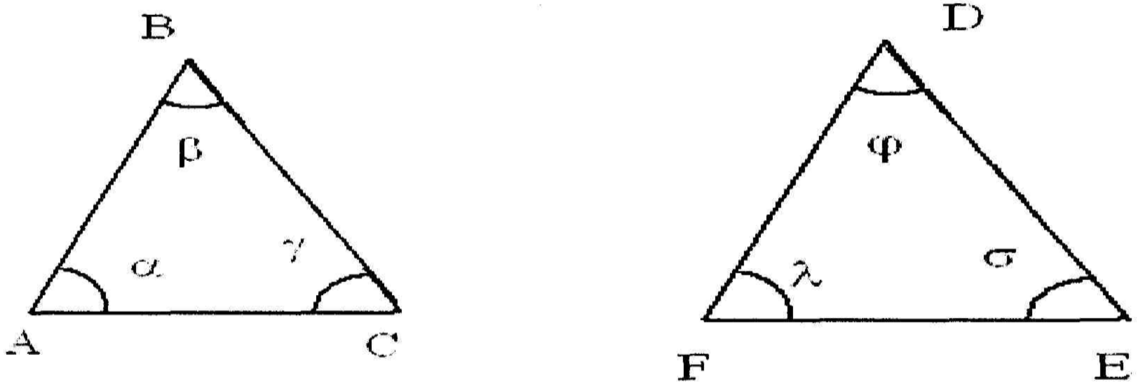
$y = 26.667$ m ve

$x = 53.333$ m

bulunur.

ÜÇGENLERDE BENZERLIK

İki üçgenin birbirine benzer olabilmesi için, her iki üçgendeki iki açının birbirine eşit olması gerekir. Örneğin verilen üçgenlerde $\alpha = \varphi$ ve $\beta = \sigma$ ise $(\gamma = \lambda)$ olacağından ABC üçgeni ile DEF üçgeni benzerdir.



Benzer üçgenlerde, eşit açıların karşısındaki kenarların birbirine oranları yazıldığında, bu oranlar da birbirlerine eşittir. Bu anlamda, benzer üçgenlerde yazılan kenarlar oranları Tales bağıntısından farklı değildir. Yukarıdaki şekilde ABC ve DEF benzer üçgenlerinde, eşit açılar karşısındaki kenarlar oranları yazılırsa;

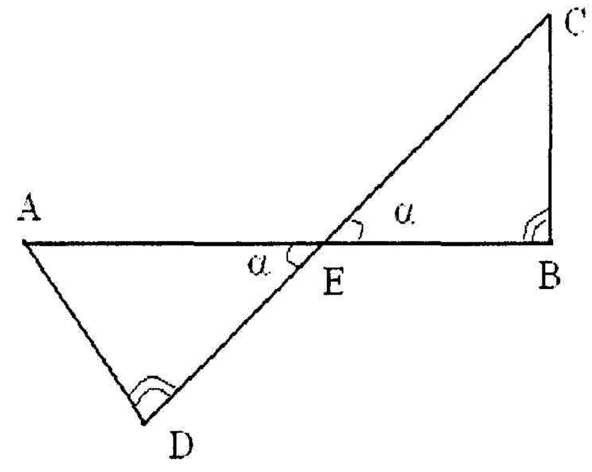
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

bağıntıları elde edilir.

Örnek: Verilen şekilde ölçüsü olmayan diğer kenarları hesaplayınız?

$\overline{AE} = 80$ m, $\overline{EB} = 40$ m, $\overline{BC} = 30$ m

AED üçgeni ile ECB üçgeni benzerdir. Buna göre,

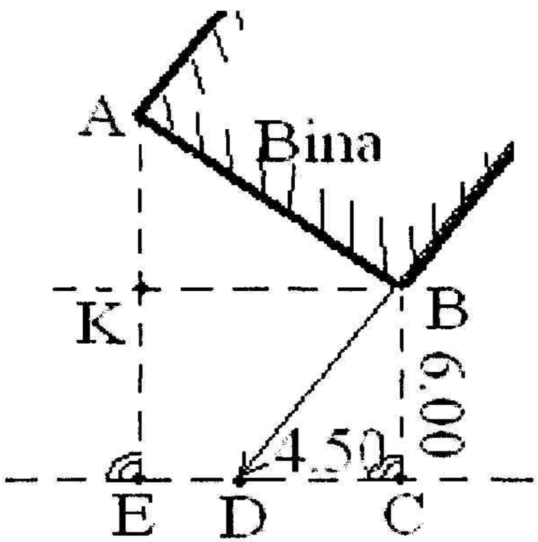


ECB dik üçgeninde $\overline{EC} = 50$ m

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$ ile

$\overline{AD} = \dfrac{\overline{AE} * \overline{BE}}{\overline{EC}} = 48$ m ve Pisagor bağıntısından $\overline{DE} = 64$ m hesaplanır.

Örnek; Şekildeki bina dikdörtgen ve kimi ölçüler yapılmıştır. A noktasına ilişkin dik ayağını ve dik boyunu bulunuz?



$\overline{AB} = 15.00$ m ölçülmüştür.

DBC dik üçgeninde $\overline{DB} = 7.50$ m bulunur. B noktasından ölçü doğrusuna çizilecek paralel ile oluşan şekillerde, BCD ve BKA üçgenleri benzerdir.

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

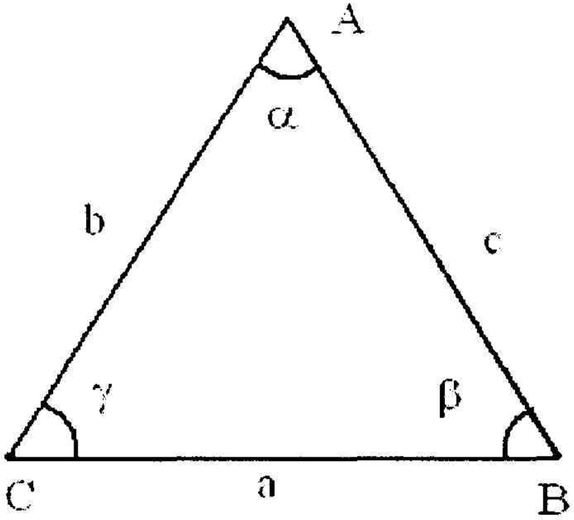
$$\overline{BK}=\overline{EC}=\frac{\overline{AB}*\overline{BC}}{\overline{BD}}=12.00\ m$$

$$\overline{AK}=\frac{\overline{AB}*\overline{CD}}{\overline{BD}}=9.00\ m$$

ile $\overline{AE}=\overline{AK}+\overline{EK}=15.00$ m biçiminde A noktasına ilişkin ölçüler bulunur.

ÜÇGENLERDE TEMEL ÖZELLIKLER

a) Herhangi bir üçgende, herhangi bir kenar; diğer iki kenarın toplamından küçük, mutlak değer olarak farkından ise büyüktür.



$a + b > c \qquad |a - b| < c$

$a + c > b \qquad |a - c| < b$

$c + b > a \qquad |c - b| < a$

b) Bir üçgende, iç açıların toplamı 200^g, dış açıların toplamı 400^g değerindir.

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^g, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 400^g$$

$$\alpha + \alpha' = 200^g, \; \beta + \beta' = 200^g, \; \gamma + \gamma' = 200^g$$

c) Üçgenlerde, eşit kenarlar karşısındaki açılar da birbirine eşittir. Yine, eşit açılar karşısında eşit kenarlar bulunur.

$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta, \quad a = c \Leftrightarrow \alpha = \gamma, \quad c = b \Leftrightarrow \gamma = \beta,$$

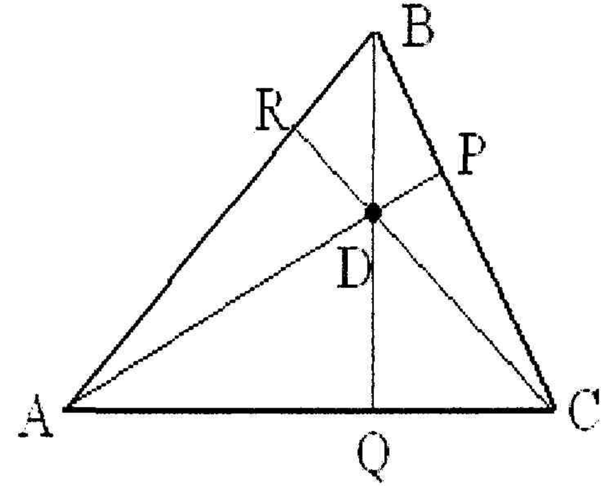
d) Bir üçgende, iki kenardan büyük olanın karşısında bulunan açı değeri, diğer açı değerinden büyüktür. Yine iki açı değerinden büyük olanın karşısındaki kenar da diğerinden büyüktür.

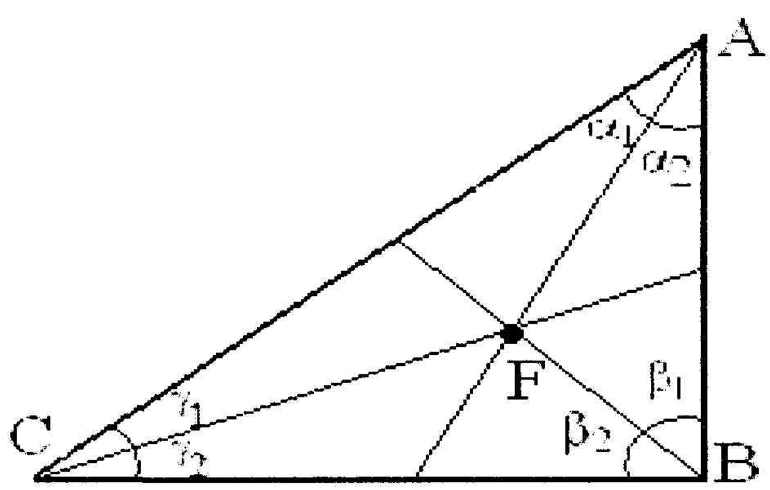
$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta, \quad a > c \Leftrightarrow \alpha > \gamma, \quad b > c \Leftrightarrow \beta > \gamma$$

e) İkizkenar üçgende, tabana inilen dik üçgenin simetri eksenidir ve tabanı ikiye böler. Dik üçgende, dar açıların toplamı 100^g değerindedir. İkizkenar dik üçgende dar açılar birbirine eşit ve her biri 50^g olur.

f) Bir üçgende, yükseklikler bir noktada kesişir. Kesişim noktası olan şekildeki D noktası, üçgenin köşe noktalarından geçen çevrel çemberin merkez noktasıdır.

$$\overline{CB} \perp \overline{AP}, \overline{AC} \perp \overline{BQ}$$

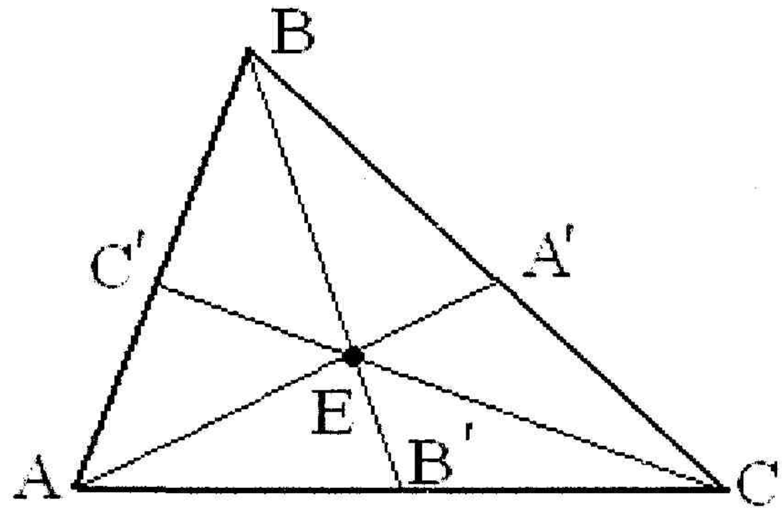




Üçgenlerde, açıortayların kesişim yeri bir noktadır. Şekildeki F ile gösterilen bu nokta, üçgenin içine çizilecek çemberin merkezi olmaktadır.

$$\alpha_1 = \alpha_2 \,;\; \beta_1 = \beta_2 \,;\; \gamma_1 = \gamma_2$$

Yine üçgenlerde, kenarortaylar bir noktada kesişmektedir. Şekildeki bu E ile gösterilen kesişim noktası, üçgenin ağırlık merkezidir ve üçgenin köşe noktasına olan uzaklığı, kenara olan uzaklığın iki katıdır.



$$\overline{AC'} = \overline{C'B}\ ;\ \overline{AB'} = \overline{B'C}\ ;\ \overline{BA'} = \overline{A'C}$$

$$2 * \overline{B'E} = \overline{EB}\ ;\ 2 * \overline{A'E} = \overline{EA}\ ;\ 2 * \overline{C'E} = \overline{EC}$$

ÜÇGENLERDE TEMEL BAĞINTILAR

Dik üçgende **Pisagor teoremi**;

$$c^2 = a^2 + b^2$$

biçiminde yazılır.

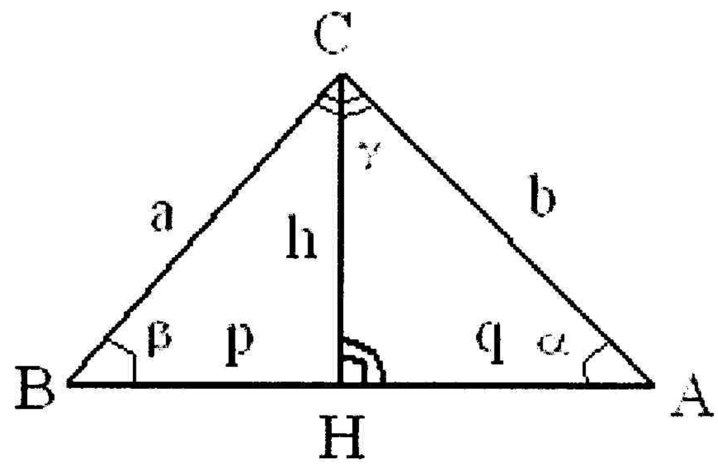
Dik üçgende **I. Öklid teoremi**;

$$a^2 = p * c, \quad b^2 = q * c$$

ve **II. Öklid teoremi** de;

$$h^2 = p * q$$

şeklinde yazılmaktadır.



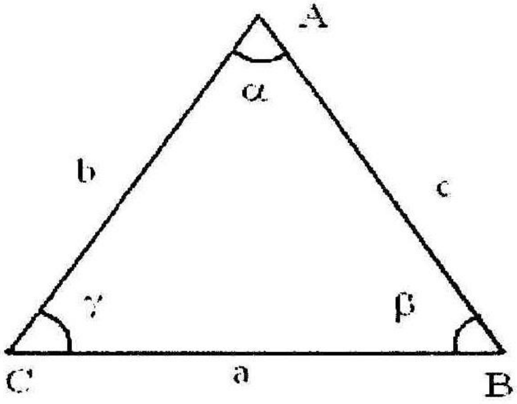
$\overline{BA}=c$ $p=\overline{BH}$ $q=\overline{AH}$

SİNÜS BAĞINTISI

Herhangi bir üçgende **sinüs bağıntısı**

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} = 2*R \text{ veya}$$

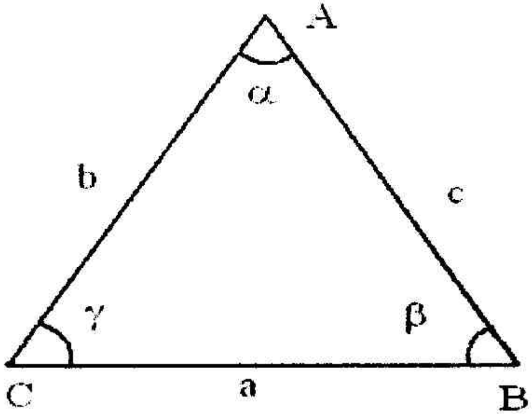
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2*R$$



biçiminde yazılmaktadır. Burada R; üçgenin noktalarından geçen çevrel çemberin yarıçapıdır.

KOSİNÜS BAĞINTISI

Herhangi bir üçgende **kosinüs bağıntısı** aşağıdaki gibi yazılır.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos\gamma$$

veya açı değerleri

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 * b * c} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 * a * c}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 * a * b}$$

PROJEKSİYON TEOREMİ

Herhangi bir üçgende **projeksiyon teoremi** ile yazılacak kenarlar;

$$a = b * \cos\gamma + c * \cos\beta$$

$$b = c * \cos\alpha + a * \cos\gamma$$

$$c = a * \cos\beta + b * \cos\alpha$$

şeklindedir ve dar açıların trigonometrik fonksiyonları biçiminde oluşturulacak dik üçgenlerle yazılmaktadır.

YÜKSEKLİK BAĞINTISI

Benzer şekilde, herhangi bir üçgendeki **yükseklik bağıntıları** da;

$$h_a = b * \sin\gamma = c * \sin\beta$$

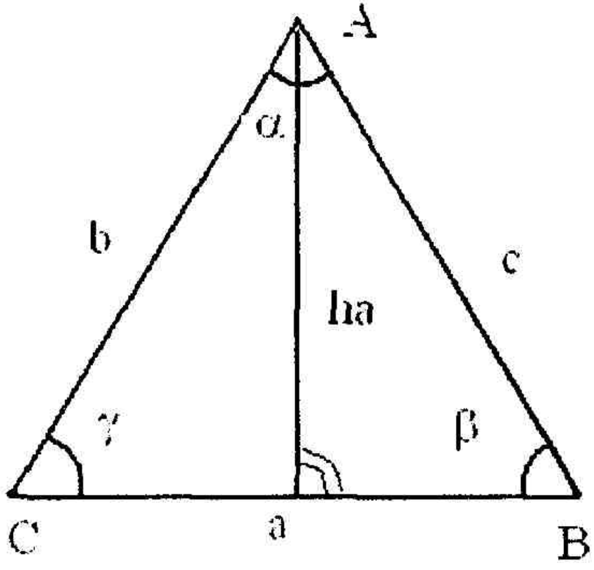
$$h_b = a * \sin\gamma = c * \sin\alpha$$

$$h_c = a * \sin\beta = b * \sin\alpha$$

biçiminde yazılmaktadır.

ÜÇGENLERDE YÜZÖLÇÜM BAĞINTILARI

a) Herhangi bir üçgende bir kenar ve bu kenara ilişkin yükseklik, yani karşı köşeden inilen dik değeri verildiğinde, söz konusu üçgenin F yüzölçüm değeri;



$$F = \frac{1}{2} * b * h_b = \frac{1}{2} * a * h_a = \frac{1}{2} * c * h_c$$

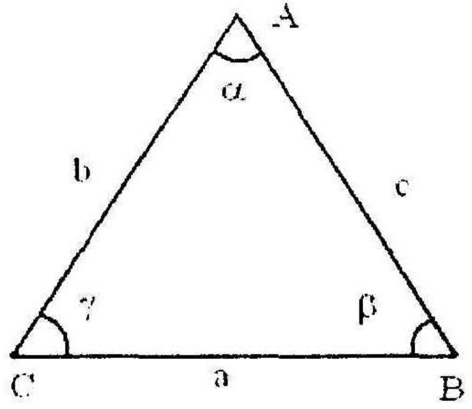
bağıntısı ile bulunur.

b) Herhangi bir üçgenin a, b, ve c gibi üç kenarı verildiğinde, bu üçgenin yüzölçümü;

$$2 * s = a + b + c \text{ ile}$$

$$F = \sqrt{s * (s - a) * (s - b) * (s - c)}$$

olarak yazılır. Bu bağıntı matematikte **Heron yüzölçüm bağıntısı** adıyla bilinir.



c) Herhangi bir üçgenin iki kenarı ve bu iki kenarın arasındaki açı değeri verildiğinde, bu üçgenin yüzölçümü;

$$F = \frac{1}{2} * a * b * \sin\gamma = \frac{1}{2} * b * c * \sin\alpha = \frac{1}{2} * a * c * \sin\beta$$

bağıntılarından uygun olanı kullanılarak bulunur.

ÜÇGEN ÇÖZÜMLERI

Bir üçgende üç adet kenar ve üç adet açı olmak üzere toplam altı adet ana elaman bulunmaktadır. Bir üçgenin çözümünün yapılabilmesi için, en az bir adedi kenar olmak üzere üç elemanının bilinmesi gerekmektedir. Dik üçgen, ikizkenar üçgen, eşkenar üçgen gibi özel üçgenlerde bilinen sayısı doğal olarak daha azdır.

<u>*Örnek*</u>; Binadan 38.43 m uzaklıktaki A noktasından $z = 86.4325^g$ düşey açısı ölçülmüştür. Bu binanın yüksekliğini hesaplayınız?

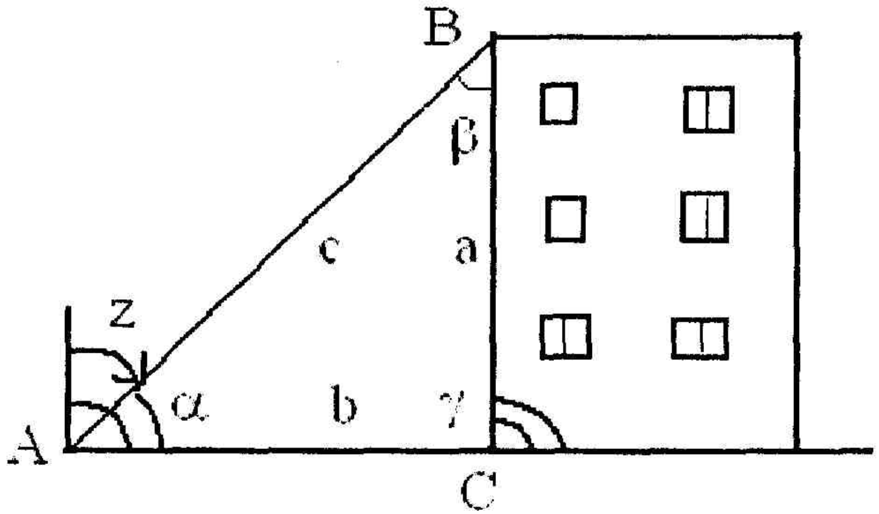
$b = \overline{AC} = 38.43$ m, $\alpha = 100^g - z = 13.5675^g$,

$a = \overline{CB}$ binanın yüksekliği

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$a = b * \tan\alpha = 8.32 \text{ m}$$

bulunur.



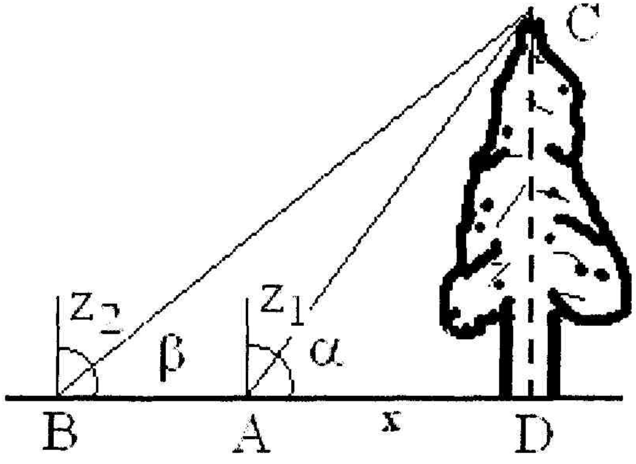
Örnek; Yanına ulaşılamayan bir ağacın boyunu belirlemek için şekildeki gibi ölçü planı oluşturulmuştur. Burada; B, A ve D noktaları bir doğru üzerindedir, $\overline{AB} = 25.00$ m, düşey açılar $z_2 = 86.4312^g$, $z_1 = 80.2512^g$ ise ağacın boyunu hesaplayınız?

$\alpha = 100^g - z_1 = 19.7488^g,$

$\beta = 100^g - z_2 = 13.5688^g,$

$\overline{AD} = x, \quad \overline{CD} = h$

gösterimleriyle,



BCD üçgeninde;

$$\tan\beta = \frac{h}{25 + x} \quad \Rightarrow h = (25 + x) * \tan\beta$$

$$\text{ACD üçgeninde; } \tan\alpha = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow h = x * \tan\alpha \quad \text{ile}$$

$$(25 + x) * \tan\beta = x * \tan\alpha \quad \Rightarrow x = \overline{AD} = 51.957 \text{ m ve}$$

$$h = \overline{DC} = 16.655 \text{ m}$$

sonucu elde edilir.

ÇEŞİTKENAR ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ

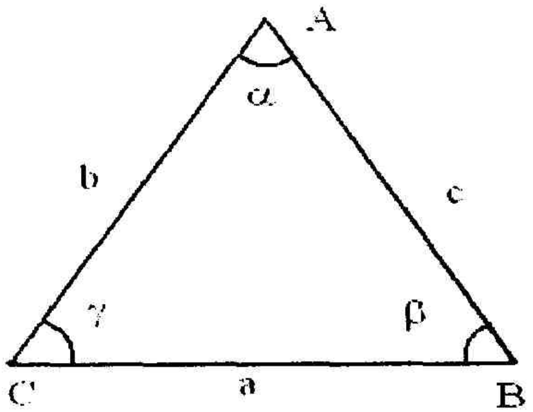
Üçgen çözümlerinde, üçgen dik ise Pisagor ve Öklid bağıntıları, çeşitkenar üçgenlerde ise daha çok sinüs ve kosinüs bağıntıları kullanılır. Bunlardan başka çeşitli bağıntılar da olmasına karşın, diğer bağıntıların yazılmasında ve özel üçgenler de olmak tüm üçgenlerin çözümünde sinüs ve kosinüs bağıntısı en önemli görevi yerine getirmektedir.

İKİ AÇI VE ARALARINDAKİ KENARIN VERİLDİĞİ ÜÇGEN

Şekildeki üçgende A ve C kösesindeki α ve γ açı değerleri ile bu iki açı arasındaki b kenar değeri verilirse, diğer açı ve iki kenar ile diğer bilgiler şu şekilde bulunur.

$$\beta = 200^g - (\alpha + \gamma)$$

biçiminde diğer açı bulunur.



Sinüs teoremiyle,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

diğer iki kenar

$$c = \frac{b * \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{b * \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$a = \frac{b * \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b * \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek; Aşağıda bilgileri verilen bir üçgendeki diğer elemanları ve A noktasından geçen açıortayın karşı kenarda oluşturduğu parçaların uzunluklarını hesaplayınız?

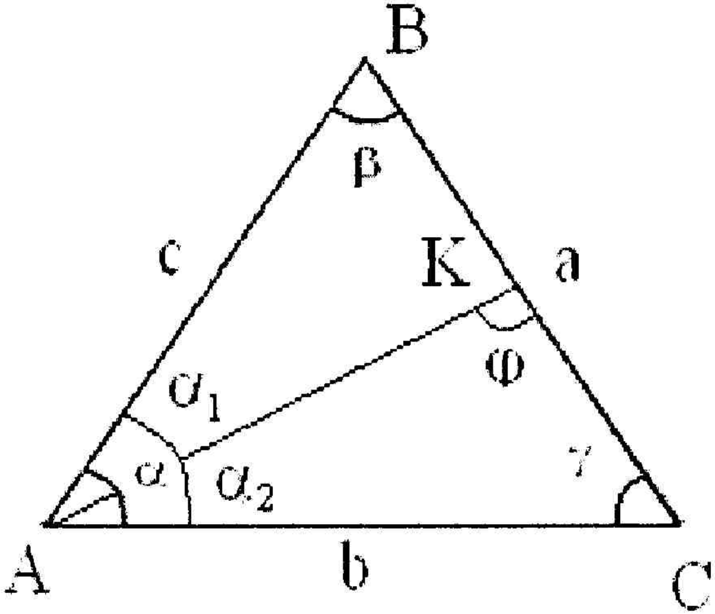
$$\alpha = 64.2542^g, \; \gamma = 38.1474^g, \; b = 68.437 \text{ m}$$

$$\beta = 200^g - (\alpha + \gamma) = 97.5984^g$$

$$c = \frac{b * \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{b * \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = 38.626 \text{ m}$$

$$a = \frac{b * \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b * \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = 57.970 \text{ m}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha / 2 = 32.1271^g$$



ile AKC üçgeninde;

$$\varphi = 200^g - (\alpha_2 + \gamma) = 129.7255^g$$

$$\frac{\overline{AK}}{\sin\gamma} = \frac{\overline{KC}}{\sin\alpha_2} = \frac{\overline{AC}}{\sin\varphi} \qquad \text{sinüs}$$

bağıntısıyla,

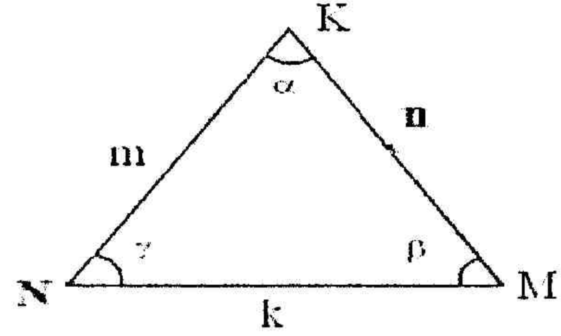
$$\overline{AK} = \frac{\overline{AC} * \sin\gamma}{\sin\varphi} = 43.225 \text{ m}$$

$$\overline{KC} = \frac{\overline{AC} * \sin\alpha_2}{\sin\varphi} = 37.056 \text{ m}$$

$\overline{KB} = a - \overline{KC} = 20.914$ m sonucu bulunur.

Örnek; Aşağıdaki verilere göre ölçülemeyen $\overline{KL}$ ve $\overline{LM}$ uzunluklarını bulunuz?

DN	BN	Doğrultu	Kenar
K	N	0.0000^g	?
	M	68.4325	65.44 m
M	N	0.0000^g	?
	K	343.1875	65.45



n = $\overline{KM}$ = 65.445 m (gidiş-dönüş ortalaması)

$\alpha = 68.4325^g, \quad \beta = 56.8125^g$

$$\frac{k}{\sin\alpha} = \frac{m}{\sin\beta} = \frac{n}{\sin\gamma}$$ sinüs bağıntısı ile

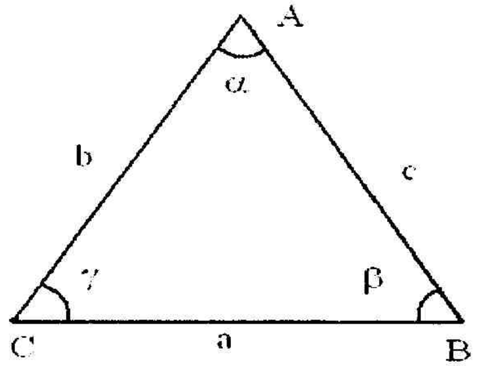
$$k = \frac{n * \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = 62.405 \text{ m}$$

$$m = \frac{n * \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 55.241 \text{ m}$$

sonucu hesaplanır.

ÜÇ KENARIN VERİLDİĞİ ÜÇGEN

Herhangi bir üçgende üç kenar değeri; şekildeki a, b ve c verildiği durumlarda, kosinüs bağıntısı kullanılır ve aşağıdaki gibi yazılır.



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 * b * c}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 * a * c}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 * a * b}$$

bağıntıları yazılmaktadır. Bulunan açılarla;

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^g$$

kontrolü yapılmalıdır.

__Örnek__; Aşağıda kenarları verilen üçgenin iç açılarını ve yüzölçümünü bulunuz?

$$a = 100.00 \text{ m}, \quad b = 120.00 \text{ m}, \quad c = 140.00 \text{ m}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 * b * c} \text{ ile}$$

$$\cos\alpha = 0.714286 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 49.35034^g$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 * a * c} \text{ ile}$$

$$\cos\beta = 0.542857 \quad \Rightarrow \quad \beta = 63.46850^g$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 * a * b} \text{ ile}$$

$$\cos\gamma = 0.200000 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 87.18116^g$$

ve bulunan açılarla; $\alpha + \beta + \gamma == 200^g$ kontrolü yapılır.

a kenarına ilişkin h_a yükseklik değeri

$$h_a = c \ast \sin\beta = b \ast \sin\gamma = 117.576 \text{ m}$$

ile üçgenin F yüzölçümü;

$$2F = a \ast h_a = 11757.55 \text{ m}^2 \Rightarrow F = 5878.775 \text{ m}^2$$

veya kontrol olarak

$$2F = a \ast b \ast \sin\gamma = b \ast c \ast \sin\alpha = a \ast c \ast \sin\beta \text{ ile}$$

$$F = 5878.775 \text{ m}^2$$

biçiminde yüzölçüm hesaplanır.

Örnek; Üçgen şeklindeki bir parselin kenarları arazide ÇŞM ile gidiş dönüş biçiminde ölçülmüştür. Bu parselin oluşturduğu üçgenin iç açılarını ve parselin yüzölçümünü bulunuz?

NN	Gidiş	Dönüş	Ortalama
AC	147.14 m	147.20 m	147.170 m ← b
CB	180.70	180.64	180.670 ← a
AB	200.00	199.93	199.965 ← c

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 * b * c} \text{ ile}$$

$$\cos\alpha = 0.492771 \quad \Rightarrow \alpha = 67.19681^g$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 * a * c} \text{ ile}$$

$$\cos\beta = 0.705396 \quad \Rightarrow \beta = 50.15383^g$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 * a * b} \text{ ile}$$

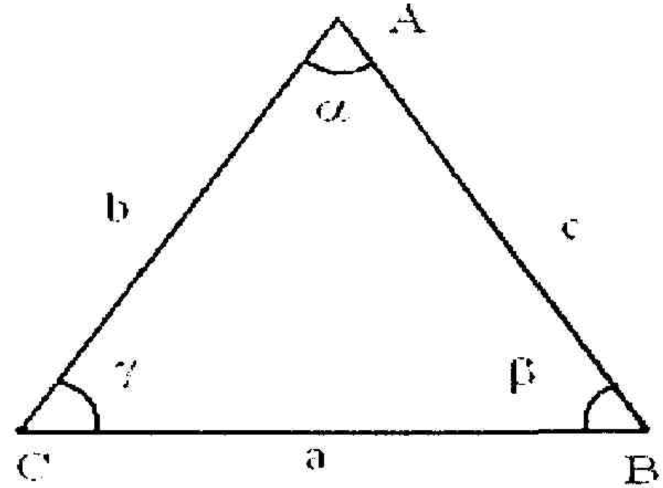
$$\cos\gamma = 0.269182 \quad \Rightarrow \gamma = 82.64935^g$$

ve bulunan açılarla; $\alpha + \beta + \gamma = 200^g$ kontrolü yapılır.

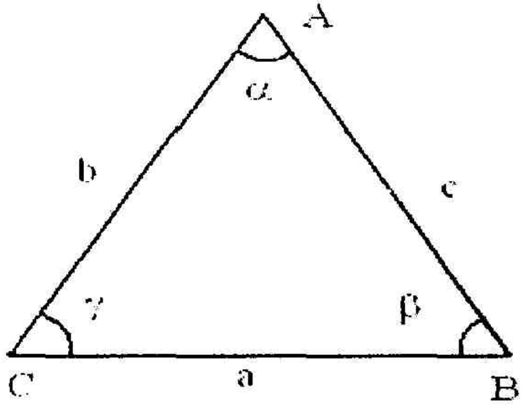
Üçgenin F yüzölçümü için;

$$2F = a*b*\sin\gamma = b*c*\sin\alpha = a*c*\sin\beta$$ ile

$F = 12803.89\ m^2$ değeri hesaplanır.



İKİ KENAR VE ARALARINDAKİ AÇININ VERİLDİĞİ ÜÇGEN



Şekildeki üçgende, a ve b kenarları ile bu iki kenar arasındaki γ açısının değeri verildiğinde; bulunması istenenler c kenarı, α ve β açı değerleri ile diğer büyüklükler, örneğin yüzölçüm değeridir.

c kenarı kosinüs teoremi ile

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos\gamma$$

bağıntısından hesaplanır. Diğer iki açı değeri, sinüs bağıntısından

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{ile}$$

$$\sin\alpha = \frac{a * \sin\gamma}{c} \Rightarrow \alpha$$

$$\sin\beta = \frac{b * \sin\gamma}{c} \Rightarrow \beta$$

açıları bulunur. $\alpha + \beta + \gamma = 200^g$ kontrolü yapılır.

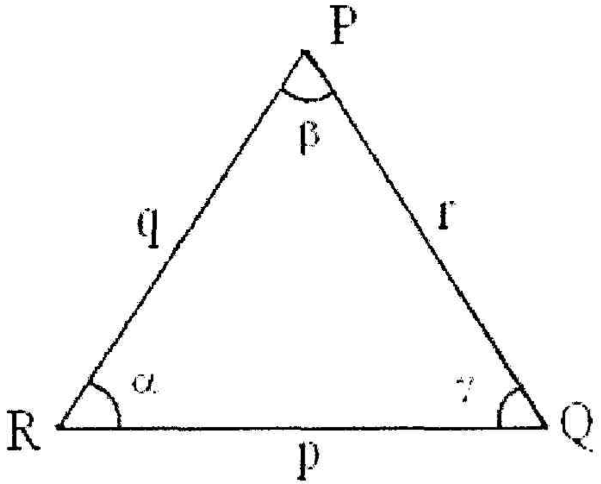
Örnek; RPQ üçgeninde, $r = 314.75$ m, $p = 280.74$ m, RQP açısı 74.7478^g olarak veriliyorsa, bu üçgenin diğer elemanlarını hesaplayınız?

$\gamma = 74.7478^g$ açı değeriyle, kosinüs bağıntısı kullanılarak;

$$q^2 = r^2 + p^2 - 2 * r * p * \cos\gamma$$

ile

$$q = 331.068 \text{ m}$$



$$\frac{p}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\beta} = \frac{q}{\sin\gamma}$$ ile

$$\sin\alpha = \frac{r * \sin\gamma}{q} \Rightarrow \alpha = 68.07765^g$$

$$\sin\beta = \frac{p * \sin\gamma}{q} \Rightarrow \beta = 57.17455^g$$

Şeklin yüzölçümü F,

$$2\,F = p*r*\sin\gamma = p*q*\sin\alpha = p*r*\sin\beta \text{ ile}$$

$$F = 40751.044\ m^2$$

değeri hesaplanır.

Örnek; Aşağıda ölçüleri verilen üçgen şeklindeki parselin diğer elemanlarını ve yüzölçümünü bulunuz?

DN	BN	Doğrultu	Kenar
D	B	0.0000^g	170.43 m
	S	74.8309	140.40

$\alpha = 74.7478^g$ açısı kullanılarak

Kosinüs teoremiyle,

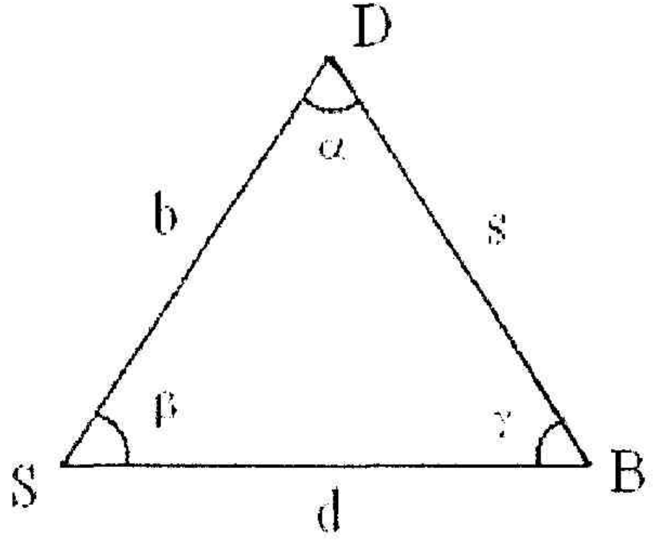
$d^2 = b^2 + s^2 - 2 * b * s * \cos\alpha$ ile

$d = 174.147$ m

$$\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{s}{\sin\gamma} \quad \text{ile}$$

$$\sin\gamma = \frac{b * \sin\alpha}{d} \Rightarrow \gamma = 53.41702^g$$

$$\sin\beta = \frac{s * \sin\alpha}{d} \Rightarrow \beta = 71.7521^g$$



açı değerleri bulunur. SDB şeklinin F yüzölçümü

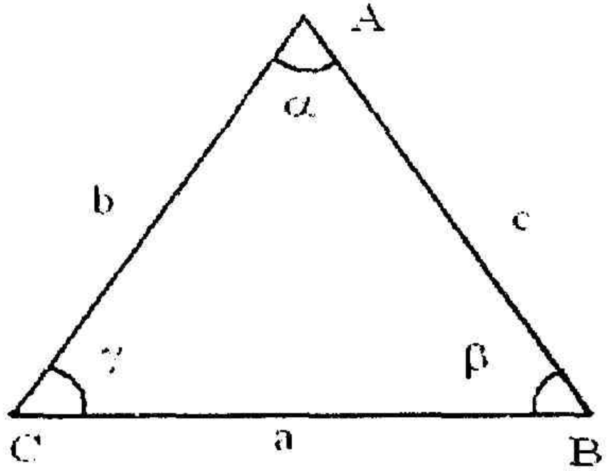
$$2\,F = d * s * \sin\gamma \;= b * s * \sin\alpha = b * d * \sin\beta \quad \text{ile}$$

$$F = 11041.273\ m^2$$

şeklinde hesaplanır.

İKİ KENAR VE BU İKİ KENARDAN BİRİNİN KARŞISINDAKİ AÇININ VERİLDİĞİ ÜÇGEN

Şekildeki üçgende, a ve b kenarları ile bu kenarlardan a değerinin karşısındaki α açısının değeri verildiğinde; bulunması istenenler c kenarı, γ ve β açı değerleri ile diğer büyüklükler, örneğin yüzölçüm değeridir.



sinüs bağıntısından

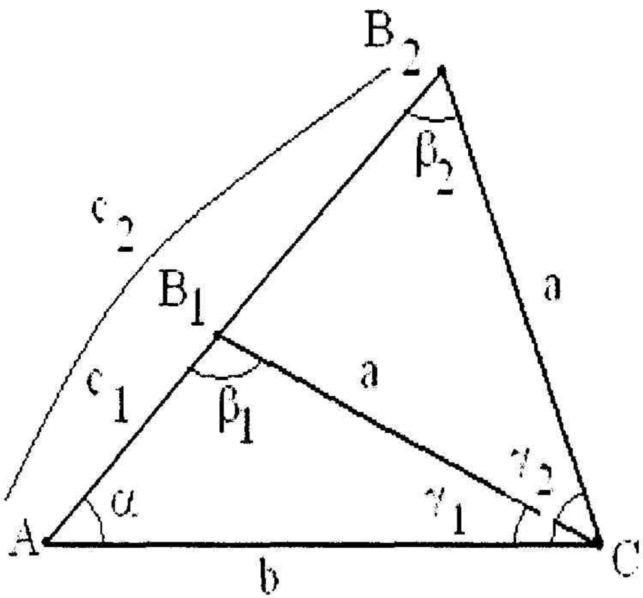
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{ile}$$

$$\sin\beta = \frac{b * \sin\gamma}{c} \quad \Rightarrow \beta$$

açısı bulunur. $\gamma = 200^{g} - (\alpha + \beta)$ diğer açı yapılır. c kenarı da

$$c = \frac{a * \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a * \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha} = \frac{b * \sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}$$

kontrollü biçiminde hesaplanır.



Bu türden üçgen çözümlerinin kimi durumlarında iki adet çözüm olabilmektedir. Verilen iki kenardan, diğerine göre büyük olan kenar karşındaki açı değeri veriliyorsa tek çözüm söz konusudur. Ancak verilen iki kenardan, diğerine göre küçük olan kenar karşısındaki açı veriliyorsa bu kez iki çözüm olacaktır.

İki çözüm durumunda iki ayrı üçgenin elemanları hesaplanır. Yukarıdaki sinüs bağıntısı ile β açısının birinci ve ikinci bölgedeki açı değerleri olan β_1 ve β_2 bulunur. Her iki β için iki adet γ_1 ve γ_2 açıları ile c_1 ve c_2 kenarları da hesaplanacaktır. Buna göre üçgenin biri AB_1C; a, b, α, β_1, γ_1, c_1 elemanlarından, üçgenin diğeri de AB_2C; a, b, α, β_2, γ_2, c_2 elemanlarından oluşur.

Örnek; Bir üçgende a = 150.00 m, c = 200.00 ve $\gamma = 64.3650^g$ ise bu üçgenin diğer elemanlarını hesaplayınız?

Bu örnekte, diğerine göre büyük kenarın karşısındaki açı değeri verildiğinden tek çözüm olacaktır.

$$\sin\alpha = \frac{a * \sin\gamma}{c} \Rightarrow \alpha = 43.8445^g$$

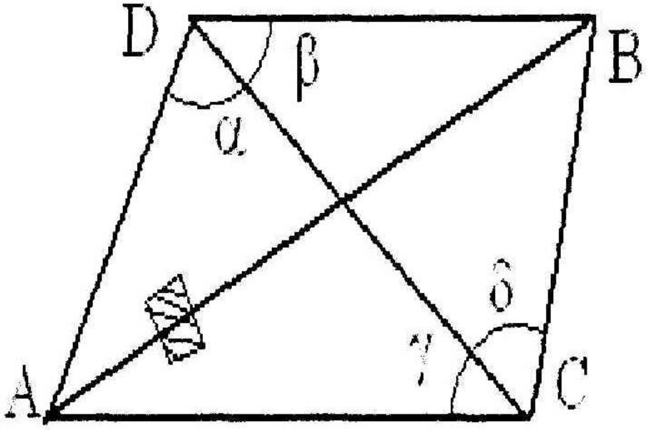
bulunur. $\beta = 200^g - (\alpha + \gamma) = 91.7905^g$ diğer açı değeridir.

$$b = \frac{c * \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{a * \sin\beta}{\sin\alpha} = 234.060 \text{ m}$$

hesaplanır.

Örnek; Aşağıdaki verilere göre doğrudan ölçülemeyen $\overline{AB}$ uzunluğunu kontrollü olarak bulunuz?

DN	BN	Doğrultu	Kenar
D	C	0.0000^g	1243.03 m
	A	75.4370	-
	B	324.5630	-
C	D	0.0000	1242.97
	B	60.6750	-
	A	339.3250	-



$\overline{DC}$ = 1243.00 m (ölçülerden gidiş dönüş ortalaması)

DBC üçgeninde sinüs bağıntısı

$$\frac{\overline{DC}}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{\overline{DA}}{\sin\gamma}=\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} \text{ ile}$$

$$\overline{DB}=\frac{\overline{DC}*\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}=1201.467 \text{ m}$$

$$\overline{BC}=\frac{\overline{DC}*\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}=1365.476 \text{ m}$$

DCA üçgeninde sinüs bağıntısı

$$\frac{\overline{DC}}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{\overline{DA}}{\sin\gamma}=\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} \text{ ile}$$

$$\overline{DA}=\frac{\overline{DC}*\sin\gamma}{\sin(\gamma+\alpha)}=1201.467 \text{ m}$$

$$\overline{AC}=\frac{\overline{DC}*\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}=1365.476 \text{ m}$$

ABC ve ADB üçgenlerinde yazılacak kosinüs bağıntısıyla,

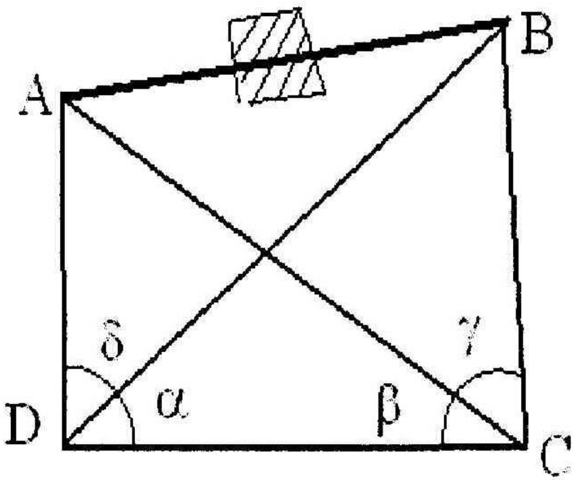
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 * \overline{AC} * \overline{BC} * \cos(\gamma + \delta) \Rightarrow \overline{AB} = 2226.281 \text{ m}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 * \overline{AD} * \overline{BD} * \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow \overline{AB} = 2226.281 \text{ m}$$

kontrollü biçimde hesaplanır.

Örnek; Aşağıdaki verilere göre doğrudan ölçülemeyen $\overline{AB}$ uzunluğunu kontrollü olarak bulunuz?

DN	BN	Doğrultu	Kenar
D	A	0.0000^g	-
	B	60.1275	-
	C	102.1014	207.431 m
C	B	0.0000	-
	D	290.9075	207.476
	A	360.0794	-



Ölçülerden; $\alpha = 41.9739^g$, $\beta = 69.1719^g$, $\gamma = 39.9206^g$, $\delta = 60.1275^g$, $\overline{DC} = 207.454$ m (gidiş-dönüş ortalaması)

DBC üçgeninde sinüs bağıntısı

$$\frac{\overline{DC}}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\overline{DB}}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} \text{ ile}$$

$$\overline{DB}=\frac{\overline{DC}*\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}=295.386 \text{ m}$$

$$\overline{BC}=\frac{\overline{DC}*\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}=182.810 \text{ m}$$

BDA üçgeninde sinüs bağıntısı

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\delta+\alpha)}=\frac{\overline{AD}}{\sin\beta}=\frac{\overline{DC}}{\sin(\alpha+\beta+\delta)} \text{ ile}$$

$$\overline{AD}=\frac{\overline{DC}*\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\delta)}=421.029 \text{ m}$$

$$\overline{AC}=\frac{\overline{DC}*\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha+\beta+\delta)}=475.466 \text{ m}$$

ABC ve ADB üçgenlerinde yazılacak kosinüs bağıntısıyla,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 * \overline{AD} * \overline{BD} * \cos\delta \Rightarrow \overline{AB} = 344.558 \text{ m}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 * \overline{AC} * \overline{BC} * \cos\gamma \Rightarrow \overline{AB} = 344.558 \text{ m}$$

kontrollü biçimde hesaplanır.

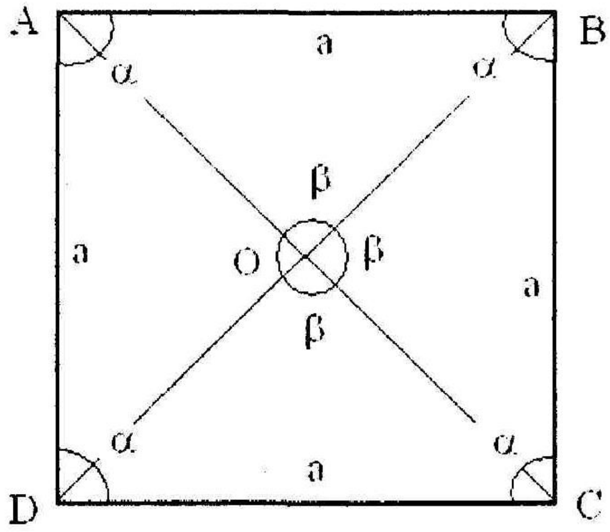
KARE

Karede, tüm kenarları birbirine eşit ve paralel, iç açıları birbirine eşit ve dik, köşegenler birbirine eşit ve aralarındaki açı dik, ayrıca köşegenler birbirini ortalamaktadır.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$ tüm kenarlar birbirine eşit,

$\alpha = 100^g$ tüm açılar birbirine eşit ve dik,

$e = \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{2} * a$ köşegenler birbirine eşit,



$\beta = 100^g$ köşegenler birbirine dik,

$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \frac{a * \sqrt{2}}{2}$ köşegenler birbirini ortalar,

$F = a^2$ karenin yüzölçümü

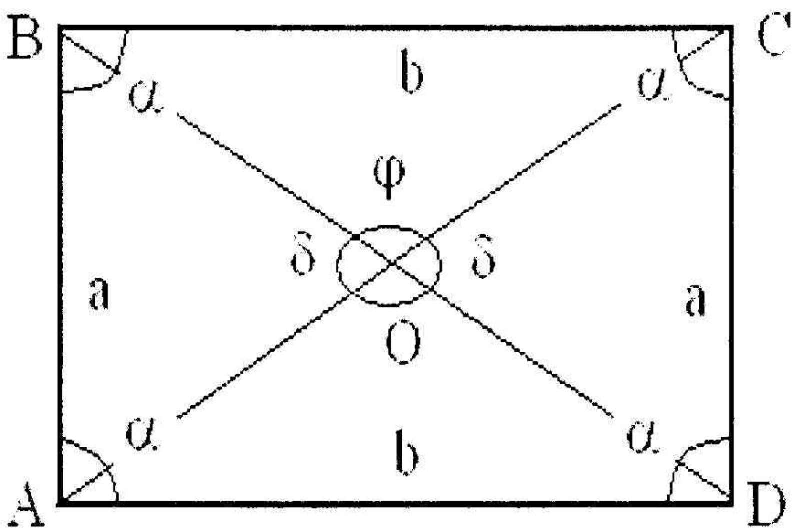
DİKDÖRTGEN

Dikdörtgende, karşılıklı kenarları birbirine eşit ve paralel, iç açıları birbirine eşit ve dik, köşegenler birbirine eşit ve köşegenler birbirini ortalamaktadır.

$\overline{AD} = \overline{BC} = b$

$\overline{CD} = \overline{BA} = a$ karşılıklı kenarlar birbirine eşit,

$\alpha = 100^g$ tüm açılar birbirine eşit ve dik,



$\varphi + \delta = 200^g$ köşegenler arasındaki açılar,

$e = \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2}$ köşegenler birbirine eşit,

$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \frac{e}{2}$ köşegenler birbirini ortalar,

$F = a * b$ dikdörtgenin yüzölçümü

Örnek; Yukarıda şekli verilen dikdörtgende köşegen e = 15.00 m ve köşegenler arasındaki dar açı $\delta = 68.8889^g$ olduğuna göre, dikdörtgenin kenar uzunluklarını ve yüzölçümünü bulunuz?

$$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \frac{e}{2} = q = 7.50 \text{ m}$$

$$a^2 = q^2 + q^2 - 2 * q * q * \cos\delta \Rightarrow a = 7.726 \text{ m}$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow b = 12.857 \text{ m}$$

$$F = a * b = 99.333 \text{ m}^2$$

biçiminde hesaplanmaktadır.