EŞKENAR DÖRTGEN

Eşkenar dörtgende, tüm kenarları birbirine eşit ve paralel, karşılıklı iç açıları birbirine eşit, köşegenler birbirine birbirini ortalamaktadır.

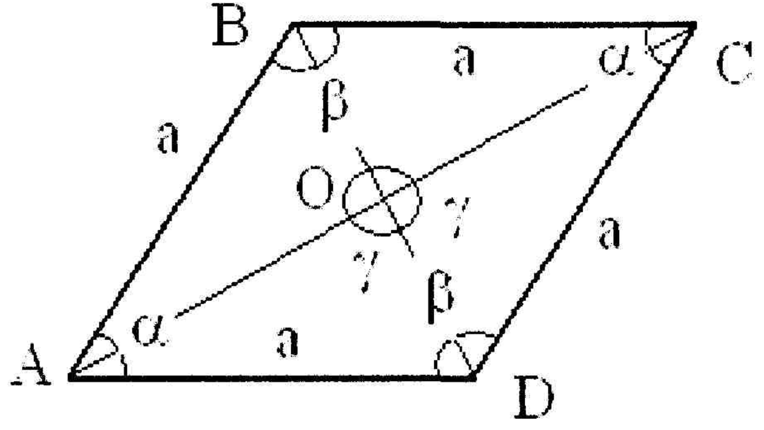
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ = a tüm kenarlar birbirine eşit,

$\alpha + \beta = 200^g$ komşu açılar bütünler,

$e = \overline{AC}$ birinci köşegen,

$f = \overline{BD}$ ikinci köşegen,

$\gamma = 100^g$ köşegenler birbirine dik,



$$\overline{AO} = \overline{OC} = \frac{e}{2} \text{ ve}$$

$$\overline{BO} = \overline{OD} = \frac{f}{2} \text{ köşegenler birbirini ortalar,}$$

$F = a^2 * \sin\alpha = a^2 * \sin\beta$ eşkenar dörtgenin yüzölçümüdür.

Örnek; Yukarıda şekli verilen eşkenar dörtgende yüzölçüm $F = 840.00\ m^2$ ve $\alpha = 84.7012^g$ ise, bu eşkenar dörtgenin kenar ve köşegen uzunluklarını bulunuz?

$$F = a^2 * \sin\alpha \Rightarrow a = 29.408\ m$$

$$\alpha + \beta = 200^g \Rightarrow \beta = 200^g - \alpha = 115.2988^g$$

Köşegenler kosinüs teoremiyle,

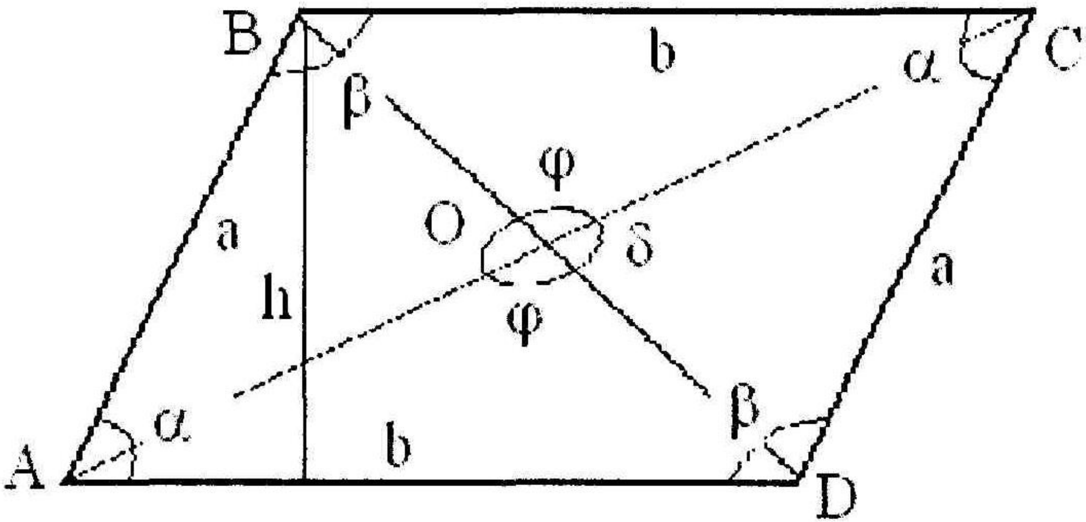
$$f^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos\alpha \Rightarrow \overline{BD} = f = 36.304\ m$$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos\beta \Rightarrow \overline{AC} = e = 46.275\ m$$

bulunur.

PARALELKENAR

Paralelkenarda, karşılıklı kenarları birbirine eşit ve paralel, karşılıklı iç açıları birbirine eşit, köşegenler birbirine birbirini ortalamaktadır.



$e = \overline{AC}$ birinci köşegen,

$f = \overline{BD}$ ikinci köşegen,

$\overline{AD} = \overline{BC} = b$

$\overline{CD} = \overline{BA} = a$ karşılıklı kenarlar birbirine eşit,

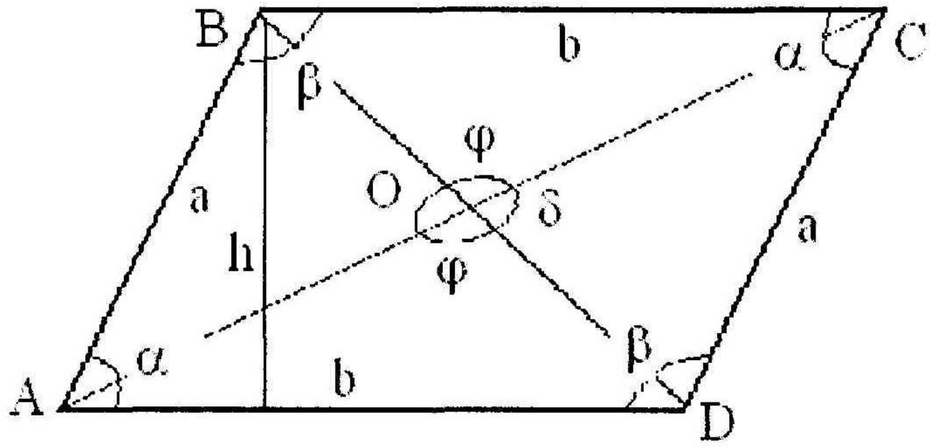
$\alpha + \beta = 200^g$ komşu açılar bütünler,

$\varphi + \delta = 200^g$ köşegenler arasındaki açılar bütünler,

$\overline{AO} = \overline{OC} = \dfrac{e}{2}$ ve

$\overline{BO} = \overline{OD} = \dfrac{f}{2}$ köşegenler birbirini ortalar,

$F = a * b * \sin\alpha = b * a * \sin\beta$ paralelkenarın yüzölçümüdür.



<u>*Örnek;*</u> Yukarıda şekli verilen paralelkenarda $\alpha = 82^g$ ve uzun kenarlar arasındaki dik uzaklık h = 24.00 m ve yüzölçüm $F = 1200\ m^2$ ise, paralelkenarın kenar ve köşegen uzunluklarını hesaplayınız?

$$h = a * \sin\alpha \Rightarrow a = \frac{h}{\sin\alpha} = 24.992 \text{ m}$$

$$F = a * b * \sin\alpha \Rightarrow b = \frac{F}{a * \sin\alpha} = 50.00 \text{ m}$$

$$\alpha + \beta = 200^g \Rightarrow \beta = 200^g - \alpha = 118^g$$

Köşegenler kosinüs teoremiyle,

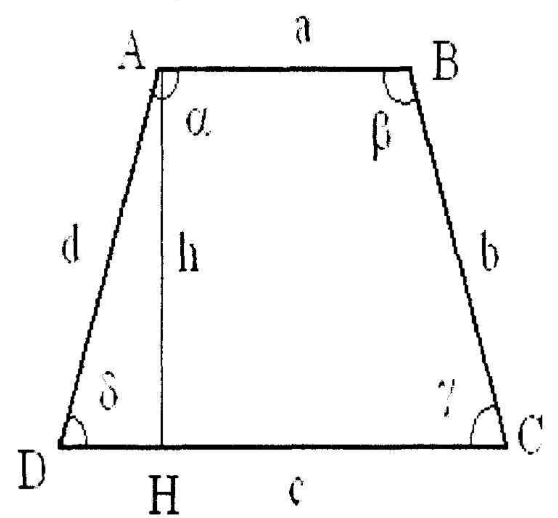
$$f^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos\beta \Rightarrow f = 61.821 \text{ m}$$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos\alpha \Rightarrow e = 49.268 \text{ m}$$

sonuçları elde edilir.

YAMUK

Verilen dörtkenarlı şekilde, karşılıklı herhangi iki kenar birbirine paralel ile oluşan dörtkenarlı şekil ***yamuk*** adını alır. Şekilde, $\overline{AB} // \overline{DC}$ ise ABCD dörtkenarlısı bir yamuktur. Bu yamukta, ayrıca $\overline{AD} = \overline{BC}$ koşulu da varsa ***ikizkenar yamuk*** özeliğini alır. Yine bu yamukta, $\alpha = 100^g$ veya $\beta = 100^g$ ise, oluşan dörtkenarlı şeklin adı ***dik yamuk*** olmaktadır.



$$\alpha + \delta = 200^g \text{ ve } \beta + \gamma = 200^g$$

özelliği bulunur. Bu yamuğun F yüzölçümü;

$$F = \frac{a+c}{2} * h$$

YAMUK ÇÖZÜMLERİ

Genel yamuk çözümlerinde, en az ikisi kenar bilgisi olmak üzere dört adet eleman gerekmektedir. Buna göre beş tür genel yamuk çözümü olasıdır. Tüm yamuk çözümlerinde, verilerin türüne göre herhangi bir köşeden, bir kenara çizilecek paralel doğruyla, uygun bir paralelkenar ile bir üçgen oluşturulur. Üçgenin bilinen biçimde çözümü yapılarak, yamuğun da diğer elemanları bulunur.

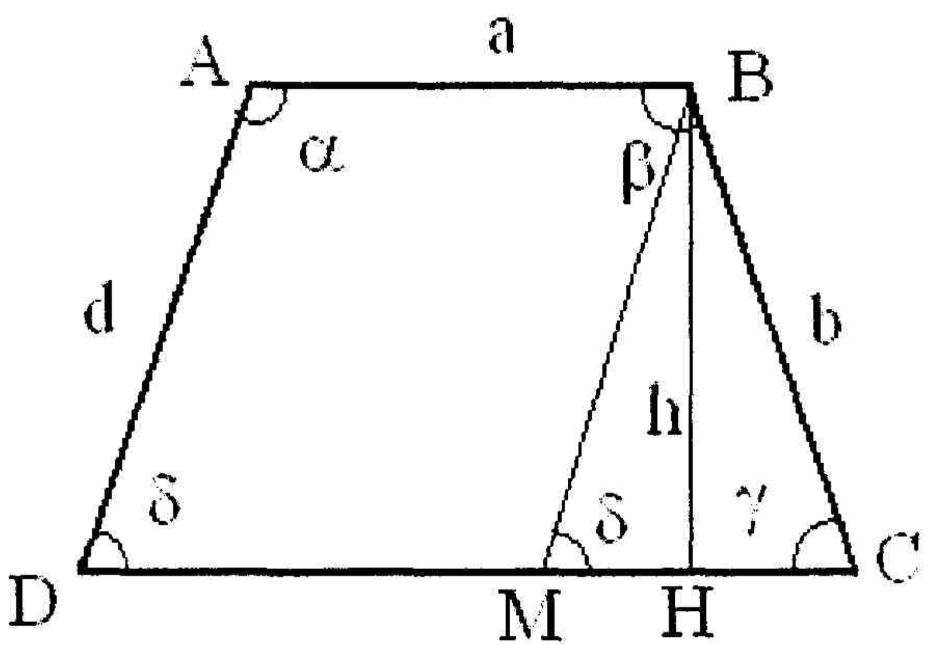
A, C, GAMA, SİGMA BİLİNİYORSA ;

Şekli verilen yamukta, $\overline{AB} // \overline{DC}$ dir. B noktasından $\overline{AD}$ kenarına paralel çizildiğinde $\overline{BM} // \overline{AD}$ olacağından, ABMD şekli bir paralelkenar, BCM şekli bir üçgen olmaktadır.

$$\alpha = 200^g - \delta \; ; \quad \beta = 200^g - \gamma$$

ve $\overline{MC} = e = c - a$ ile üçgende yazılacak sinüs bağıntısı

$$\frac{b}{\sin\delta} = \frac{e}{\sin(\gamma + \delta)} = \frac{d}{\sin\gamma}$$ ile



$$\overline{BM} = d = \frac{e * \sin\gamma}{\sin(\gamma + \delta)}$$

$$\overline{CB} = b = \frac{e * \sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

ve paralel kenarlar arasındaki uzaklık, diğer bir anlatımla üçgenin yüksekliği $h = \overline{BH}$ değeri

$$h = b * \sin\gamma = d * \sin\delta$$

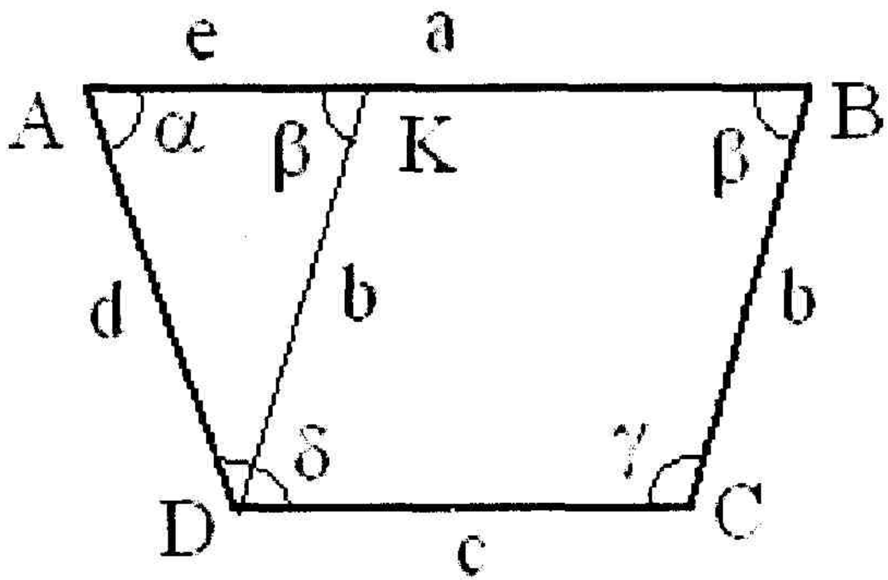
biçiminde kontrollü olarak bulunur. Şeklin yüzölçümü olan F

$$F = \frac{a + c}{2} * h$$

bağıntısıyla hesaplanır.

Örnek; Aşağıda elemanları verilen $\overline{AB} // \overline{DC}$ yamuğunun diğer elemanlarını ve yüzölçümünü hesaplayınız?

$a = 120.00$ m, $c = 100.00$ m, $\delta = 120^g$, $\gamma = 130^g$



$$\alpha = 200^g - \delta = 80^g$$

$$\beta = 200^g - \gamma = 70^g$$

Şekilde, D noktasından $\overline{BC}$ kenarına paralel çizildiğinde $\overline{BC} // \overline{KD}$ olacağından, KBCD şekli bir paralelkenar, AKD şekli bir üçgen olmaktadır.

$$\overline{AK} = e = a - c = 20.00 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{e}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{d}{\sin\beta} \text{ ile}$$

$$\overline{AD} = d = \frac{e * \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 25.201 \text{ m}$$

$$\overline{CB} = b = \frac{e * \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = 26.900 \text{ m}$$

$$h = d * \sin\alpha = b * \sin\beta = 23.968 \text{ m}$$

$$F = \frac{a + c}{2} * h = 2636.48 \text{ m}^2$$

C, D, ALFA,BETA BİLİNİYORSA ;

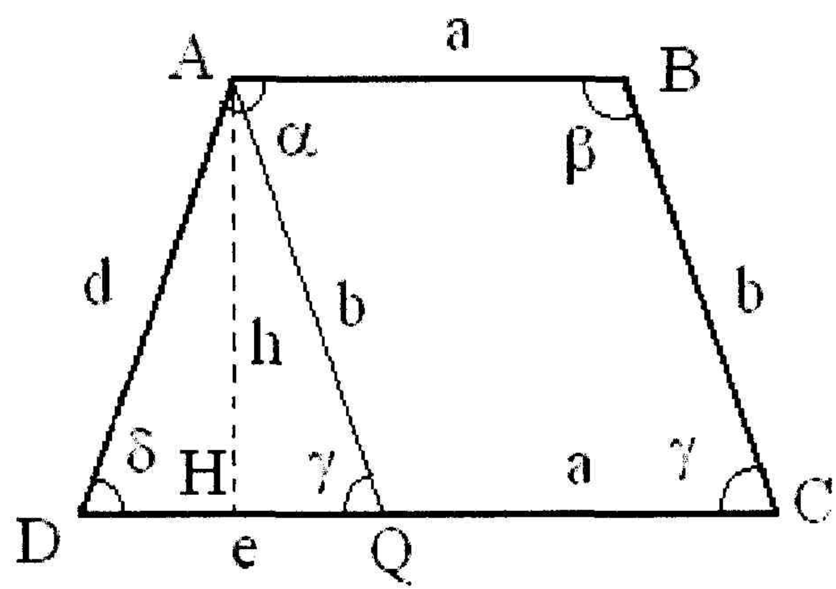
Şekli verilen yamukta, $\overline{AB} // \overline{DC}$ dir. A noktasından $\overline{BC}$ kenarına bir paralel çizildiğinde $\overline{BC} // \overline{AQ}$ olacağından, ABCQ şekli bir paralelkenar, AQD şekli bir üçgen olmaktadır.

$\delta = 200^g - \alpha$;

$\gamma = 200^g - \beta$ ve

$\overline{DQ} = e = c - a$

ile üçgende yazılacak sinüs bağıntısı



$$\frac{b}{\sin\delta} = \frac{e}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{d}{\sin\gamma} \quad \text{ile}$$

$$\overline{CB} = \overline{AQ} = b = \frac{d * \sin\delta}{\sin\gamma}$$

$$\overline{DQ} = e = \frac{d * \sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma}$$

$a = \overline{AB} = c - e$ kenarı bulunur

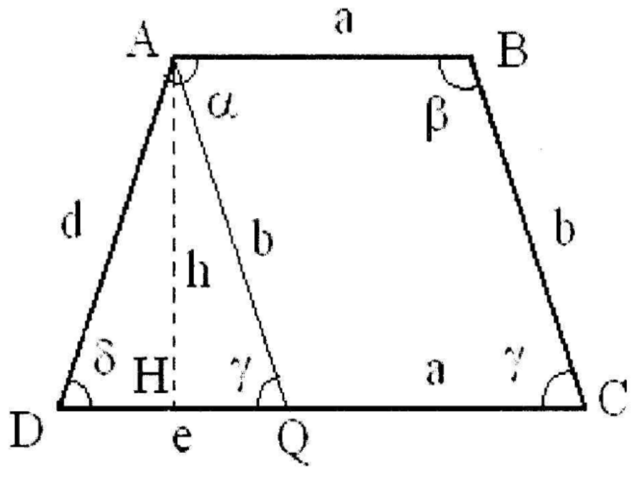
$$h = b * \sin\gamma = d * \sin\delta$$

$$F = \frac{a+c}{2} * h$$

Örnek; Aşağıdaki veriler $\overline{AB}//\overline{DC}$ yamuğuna ilişkinse, bu yamuğun diğer elemanlarını ve yüzölçümünü hesaplayınız?

DN	BN	Doğrultu	Kenar
A	B	0.000^g	?
	D	112.434	125.40 m
B	A	0.000^g	?
	C	290.005	?

$c = \overline{DC} = 150.00$ m



Ölçülerden;

$\alpha = 112.434^g$ ve

$\beta = 109.995^g$ ile

$\delta = 200^g - \alpha = 87.566^g$;

$\gamma = 200^g - \beta = 90.005^g$

A noktasından $\overline{BC}$ kenarına paralel çizildiğinde $\overline{BC} // \overline{AQ}$ olacağından, ABCQ şekli bir paralelkenar, AQD şekli bir üçgen olmaktadır. Sinüs bağıntısından;

$$\overline{CB} = \overline{AQ} = b = \frac{d * \sin\delta}{\sin\gamma} = 124.547 \text{ m}$$

$$\overline{DQ} = e = \frac{d * \sin(\gamma + \delta)}{\sin\gamma} = 43.811 \text{ m}$$

ile a kenarı, $a = \overline{AB} = c - e = 106.189$ m bulunur.

$$h = b * \sin\gamma = d * \sin\delta = 123.016 \text{ m}$$

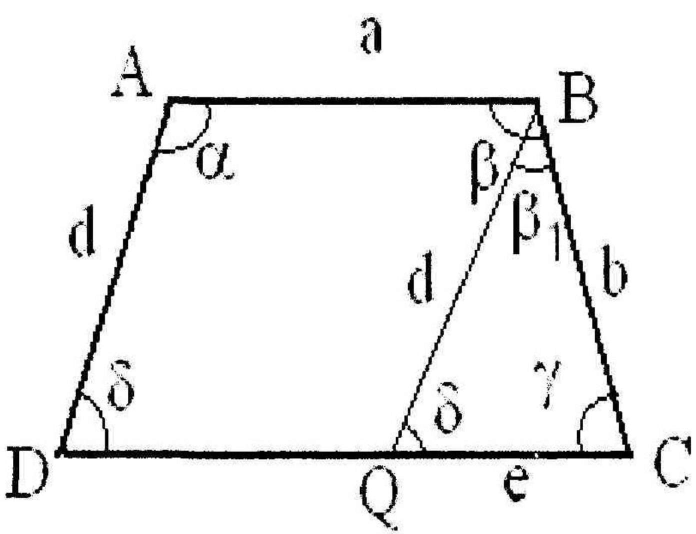
$$F = \frac{a + c}{2} * h = 15757.67 \text{ m}^2$$

sonucu bulunur.

A, B, ALFA, BETA BİLİNİYORSA ;

Şekli verilen yamukta, $\overline{AB} // \overline{DC}$ dir. Burada verilenler; α, β açı değerleri ile a ve b kenarlarıdır. B noktasından $\overline{AD}$ kenarına paralel çizildiğinde $\overline{AD} // \overline{BQ}$ olacağından, ABQD şekli bir paralelkenar, BCQ şekli bir üçgen olmaktadır. $\overline{CQ} = e$ ile

$\delta = 200^g - \alpha$ ve $\gamma = 200^g - \beta$ açıları bulunur.



Üçgende yazılacak sinüs bağıntısı;

$$\frac{b}{\sin\delta} = \frac{e}{\sin\beta_1} = \frac{d}{\sin\gamma} \quad \text{ile,}$$

$$d = \frac{b * \sin\gamma}{\sin\delta} \quad \text{ve}$$

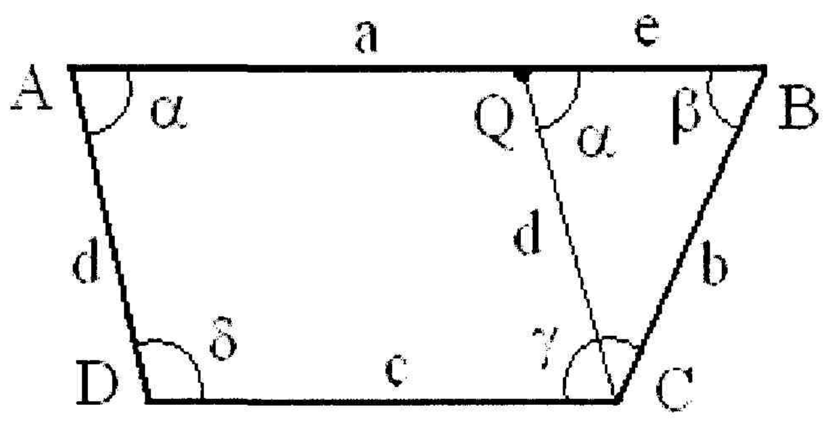
$$e = \frac{b * \sin(\gamma + \delta)}{\sin\delta} \quad \text{ile}$$

$$\overline{CD} = \overline{QD} + \overline{QC} = \overline{QD} + e = c$$

kenarları bulunur ve yükseklik ve yüzölçüm değeri de, önceki bölümlerde olduğu hesaplanır.

Örnek; Aşağıda ölçüleri verilen $\overline{AB}//\overline{DC}$ yamuk şeklindeki parselin yüzölçümünü, yamuğun diğer elemanlarını hesaplayınız?

DN	BN	Doğrultu	Kenar
B	A	0.000^g	212.78 m
	C	320.847	27.08
A	B	0.000	212.69
	D	87.274	?



Ölçülerden;

$\alpha = 87.274^g$,

$\beta = 79.153^g$

ve ortalama ile a = 212.735 m hesaplanır.

$\delta = 200^g - \alpha = 112.726^g$ ve

$\gamma = 200^g - \beta = 120.847^g$

açıları bulunur.

QBC üçgeninde yazılacak sinüs teoremi,

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{e}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{d}{\sin\beta} \quad \text{ile,}$$

$$d = \frac{b * \sin\beta}{\sin\alpha} = 26.162 \text{ m}$$

$$e = \frac{b * \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = 13.905 \text{ m}$$

$$\overline{AB} = \overline{QA} + \overline{QB} = c + e = a \Rightarrow c = a - e = 198.830 \text{ m}$$

$$h = b * \sin\beta = d * \sin\alpha = 25.641 \text{ m ile}$$

$$F = \frac{a+c}{2} * h = 5276.47 \text{ m}^2$$

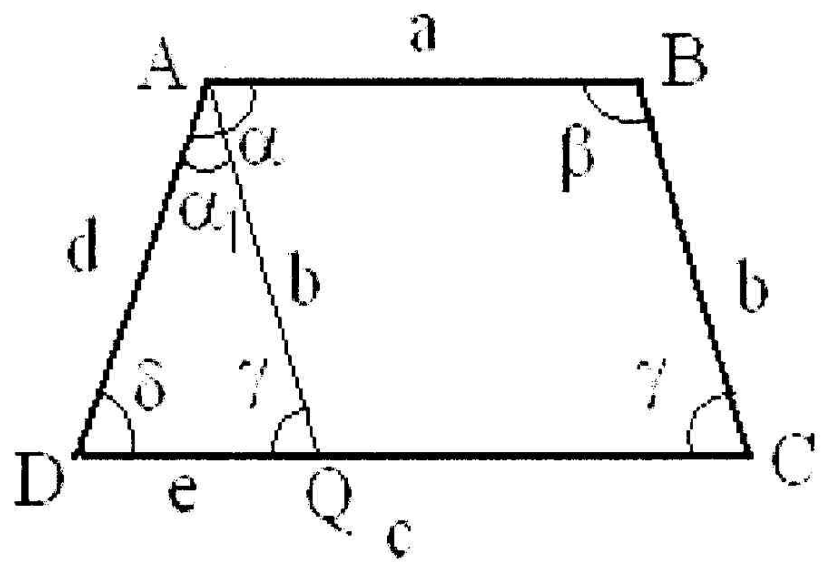
ÜÇ KENAR VE BİR AÇI BİLİNİYORSA ;

Şekli verilen yamukta, $\overline{AB} // \overline{DC}$ dir. Burada verilenler; a, b, c kenarları ile δ açı değeridir. A noktasından $\overline{BC}$ kenarına bir paralel çizildiğinde $\overline{BC} // \overline{AQ}$ olacağından, ABCQ şekli bir paralelkenar, AQD şekli bir üçgen olmaktadır.

$$\overline{DQ} = e = c - a \text{ ile}$$

$$\frac{b}{\sin\delta} = \frac{e}{\sin\alpha_1} = \frac{d}{\sin\gamma}$$

sinüs bağıntısıyla



$$\alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{e * \sin\delta}{b}\right)$$

$$\alpha = 200^g - \delta \; ; \quad \gamma = 200^g - (\delta + \alpha_1) \;\; \text{ve} \quad \beta = 200^g - \gamma$$

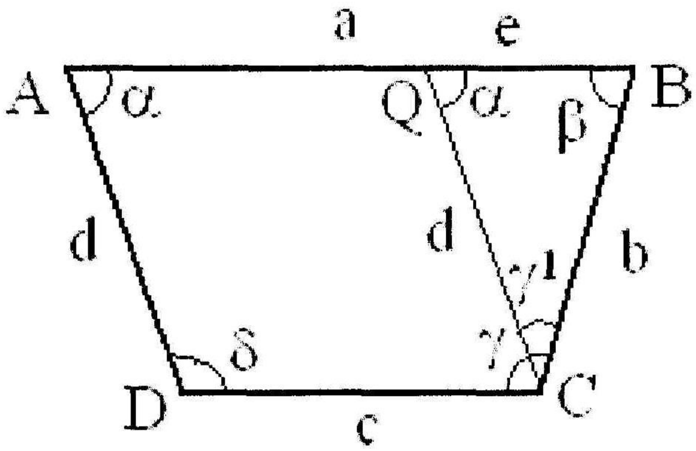
açı değerleri hesaplanır.

$$\overline{AD} = d = \frac{b * \sin\gamma}{\sin\delta}$$

ile de diğer kenar bulunur. Yükseklik ve yüzölçüm, önceki bölümlerde olduğu hesaplanır.

Örnek; Aşağıda ölçüleri verilen $\overline{AB} // \overline{DC}$ yamuk şeklindeki parselin yüzölçümünü, yamuğun diğer elemanlarını hesaplayınız?

DN	BN	Doğrultu	Kenar
C	D	0.000^g	80.00 m
	B	120.120	125.00
$\overline{AB} = a = 180.00$ m			



Ölçülere göre;

$a = 180.00$ m,

$b = 125.00$ m,

$c = 80.00$ m,

$\gamma = 120.120^g$ bulunur.

C noktasından $\overline{DA}$ kenarına bir paralel çizildiğinde $\overline{DA} // \overline{CQ}$ olacağından, CQB şekli bir üçgen olmaktadır.

$$\overline{BQ} = e = a - c = 100.00 \text{ m}$$

$$\beta = 200^g - \gamma = 79.88^g$$

$$d^2 = e^2 + b^2 - 2 * e * b * \cos\beta \Rightarrow d = 133.622 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{e}{\sin\gamma^1} = \frac{d}{\sin\beta} \quad \text{ile} \qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{b * \sin\beta}{d}\right) = 69.7397^g$$

$$h = b * \sin\beta = d * \sin\alpha = 118.809 \text{ m ile}$$

$$F = \frac{a+c}{2} * h = 15445.17 \text{ m}^2$$

DÖRT KENARIN VERİLDİĞİ DURUM

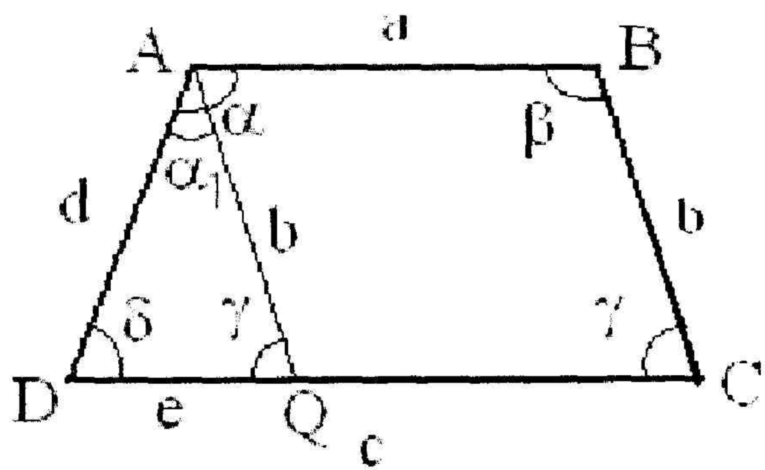
Şekli verilen yamukta, $AB // DC$ dir. Burada verilenler; a, b, c ve d kenarlarıdır. A noktasından $\overline{BC}$ kenarına bir paralel çizildiğinde $\overline{BC} // \overline{AQ}$ olacağından, ABCQ şekli bir paralelkenar, AQD şekli ise üç kenarı bilinen bir üçgen olmaktadır.

Kosinüs teoremi açı bağıntılarıyla;

$$\cos \alpha_1 = \frac{b^2 + d^2 - e^2}{2 * b * d}$$

$$\cos \delta = \frac{d^2 + e^2 - b^2}{2 * d * e}$$

$$\cos \gamma = \frac{b^2 + e^2 - d^2}{2 * b * e}$$

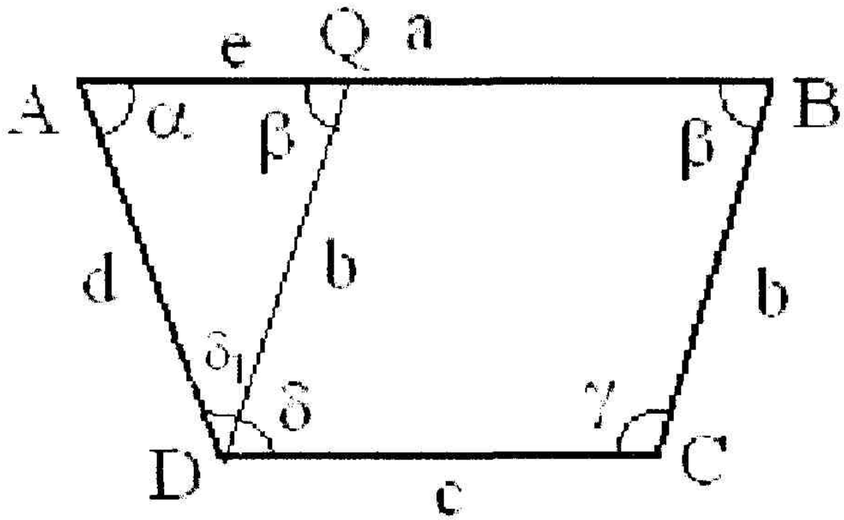


Yamuğun diğer iki açısı ile yüzölçümü, yukarıdaki örneklerde olduğu gibi hesaplanır.

Örnek; $\overline{AB} // \overline{DC}$ olan yamuk şeklindeki parselin kenarları a = 180.00 m, b = 75.00 m, c = 65.00 m, d = 85.00 m ise bu parselin yüzölçümünü, yamuğun diğer elemanlarını hesaplayınız?

D noktasından $\overline{CB}$ kenarına bir paralel çizildiğinde $\overline{BC} // \overline{QD}$ olacağından, AQD şekli ise üç kenarı bilinen bir üçgen olmaktadır.

$\overline{AQ} = e = 115.00$ m ile



$$\cos\alpha = \frac{e^2 + d^2 - b^2}{2 * e * d} \Rightarrow \alpha = 45.20487^g$$

$$\cos\delta_1 = \frac{d^2 + b^2 - e^2}{2 * d * b} \Rightarrow \delta_1 = 101.87268^g$$

$$\cos\beta = \frac{b^2 + e^2 - d^2}{2 * b * e} \Rightarrow \beta = 52.92245^g$$

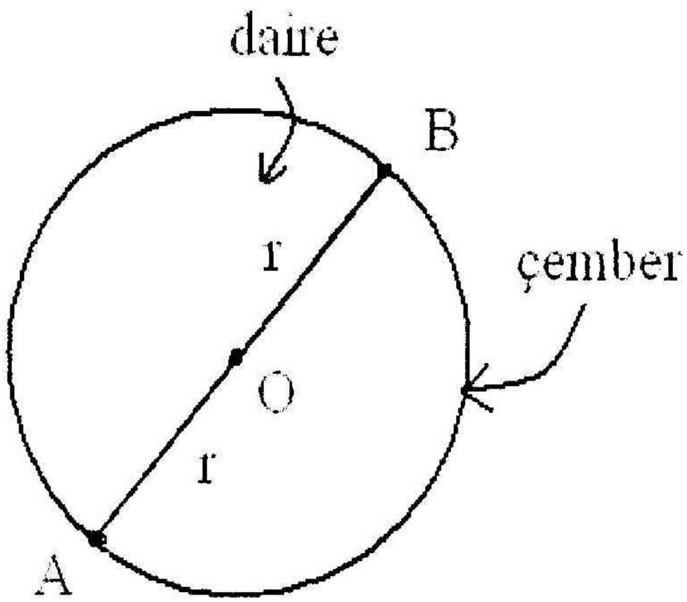
$\alpha + \beta + \delta_1 = 200^g$ denetimi sağlanmaktadır.

$h = b * \sin\beta = d * \sin\alpha = 55.411$ m ile

$$F = \frac{a + c}{2} * h = 6787.85\ m^2$$

Merkez nokta denilen bir noktaya, çevresindeki tüm noktalardan eşit uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu eğri ile çevrili düzleme daire, eğriye ise çember adı verilmektedir. Şekilde, O; noktası çemberin merkezi, r; bu çemberin yarıçapı ise;

$$\overline{OA} = \overline{OB} = r$$



ile çemberin çevresi Ç;

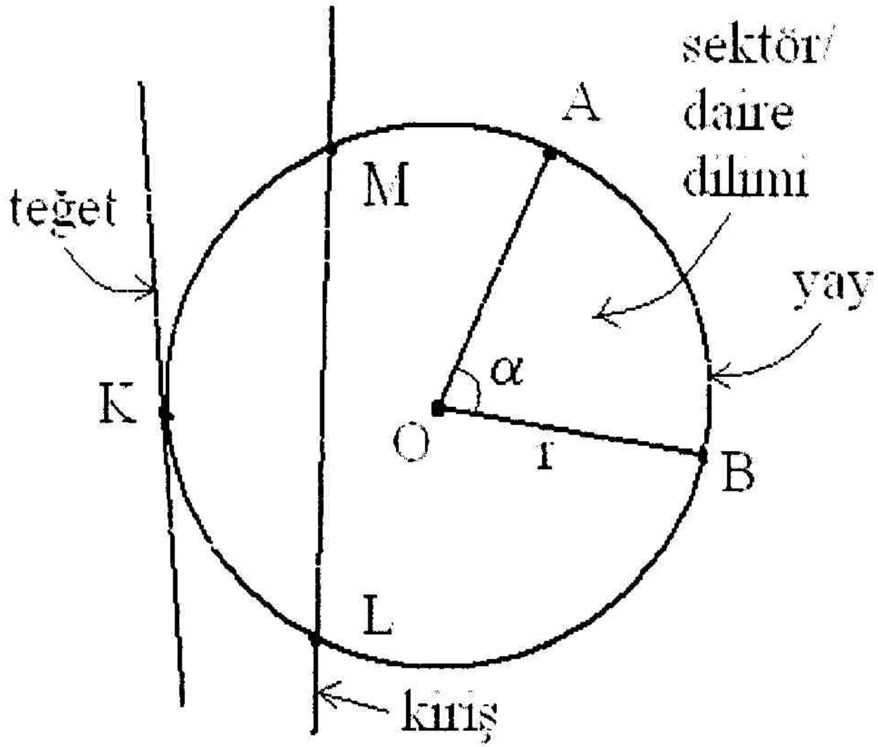
$$Ç = 2 * \pi * r$$

yüzölçümü F;

$$F = \pi * r^2$$

bağıntılarıyla hesaplanmaktadır.

Dairenin iki yarıçapı arasında kalan bölüme **daire dilimi** veya sektör adı verilir. Daire kesmesinin yüzölçümü F_k;



$$F_k = \pi * r^2 * \frac{\alpha^g}{400^g}$$

bağıntısıyla hesaplanır.

Çember üzerinde A ve B noktaları arasındaki b yay uzunluğu;

$$b = \frac{r * \alpha^g}{\rho^g};$$

$$\rho^g = \frac{200^g}{\pi}$$ şeklinde hesaplanır.

Eğer açı birimi derece ise daire kesmesinin yüzölçümü F_k;

$$F_k = \pi * r^2 * \frac{\alpha^0}{360^0}$$

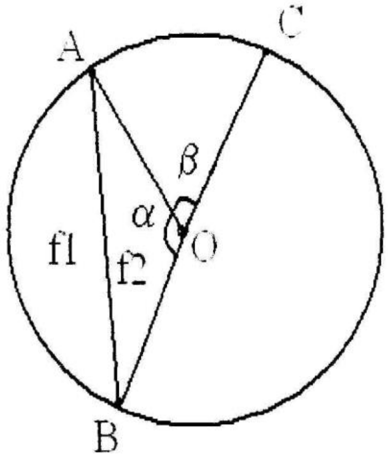
ve yay boyu bağıntısı da

$$b = \frac{r * \alpha^0}{\rho^0}; \qquad \rho^o = \frac{180^o}{\pi}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek; Şekildeki çemberin yarıçapı r = 85 cm, $\beta = 17.324^g$, $\alpha = 82.654^g$ olduğuna göre;

a) OAC daire diliminin yüzölçümünü hesaplayınız?
b) AC yay uzunluğunu bulunuz?
c) $\overline{AB}$ kiriş boyunu bulunuz?
d) $\overline{AB}$ kirişi ayrılan kısmın yüzölçümünü bulunuz?



Çemberin çevresi;

$Ç = 2 * \pi * r = 534.071$ cm

Dairenin yüzölçümü,

$F = \pi * r^2 = 22698.007$ cm^2

a) $\beta = 17.324^g$ ile b) AC $= c$ yay uzunluğu

$$F_k = \pi * r^2 * \frac{\beta^g}{400^g} \qquad \rho^g = \frac{200^g}{\pi} = 63.66197\ldots \text{ ile } \quad c = \frac{r * \beta^g}{\rho^g} = 23.131 \text{ cm}$$

$$F_k = 983.051 \text{ cm}^2$$

c) AB kiriş uzunluğu için AOB üçgeni çözülür, iki kenar ve aralarındaki açı bellidir. Kosinüs teoremi ile;

$$\alpha = 82.654^g, \ o = \overline{AB}, \ a = \overline{OB}, \ b = \overline{OA} \text{ ile}$$

$$o^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * c * \cos\alpha \quad \text{bağıntısından}$$

$$o = \overline{AB} = 102.768 \text{ cm}$$

d) $\overline{AB}$ kirişi ile ayrılan f_1 yüzölçümü, AOB daire kesmesinin yüzölçümü f_3 ve BAO üçgeninin yüzölçümü f_2 gösterimleriyle,

$f_1 = f_3 - f_2$ şeklinde hesaplanacaktır. Buna göre,

$$f_3 = \pi * r^2 * \frac{\alpha^g}{400^g} = 4690.203 \text{ cm}^2$$

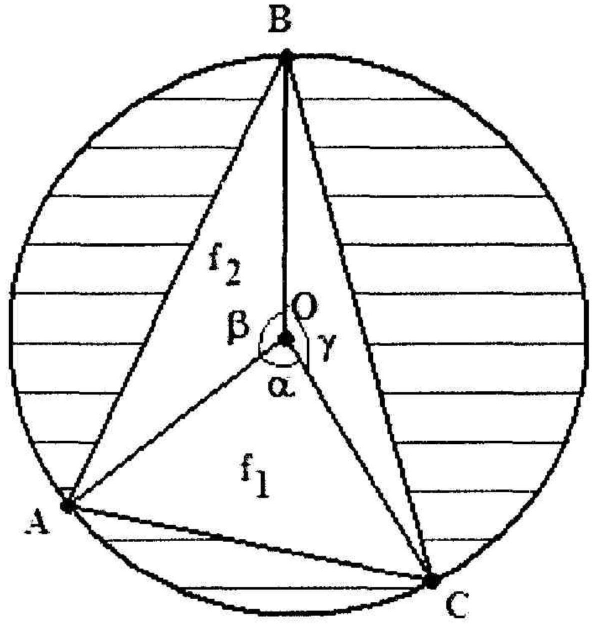
$$f_2 = \frac{1}{2} * \overline{AO} * \overline{BO} * \sin\alpha = 3479.231 \text{ cm}^2 \text{ ile}$$

$$f_1 = f_3 - f_2 = 1210.972 \text{ cm}^2$$

ile istenilen kısmın yüzölçümü bulunur.

Örnek; Şekildeki çemberin yarıçapı r = 95.5 cm, $\beta = 2*\alpha$, $\gamma = 3*\alpha$ ise şeklin taralı kısmının yüzölçümünü hesaplayınız.

Merkezdeki iç açıların toplamı $\alpha + 2*\alpha + = 3*\alpha = 6*\alpha = 360^0$ ile $\alpha = 60^0$ bulunur.



Tüm dairenin yüzölçümü;

$$F = \pi * r^2 = 28652.110 \text{ cm}^2$$

olarak hesaplanır. OCA üçgeninin yüzölçümü f_1;

$$f_1 = \frac{1}{2} * \overline{AO} * \overline{CO} * \sin\alpha$$

$$= 3949.184 \text{ cm}^2$$

ve OAB üçgeninin yüzölçümü f_2;

$$f_2 = \frac{1}{2} * \overline{AO} * \overline{BO} * \sin\beta = 3949.184 \text{ cm}^2$$

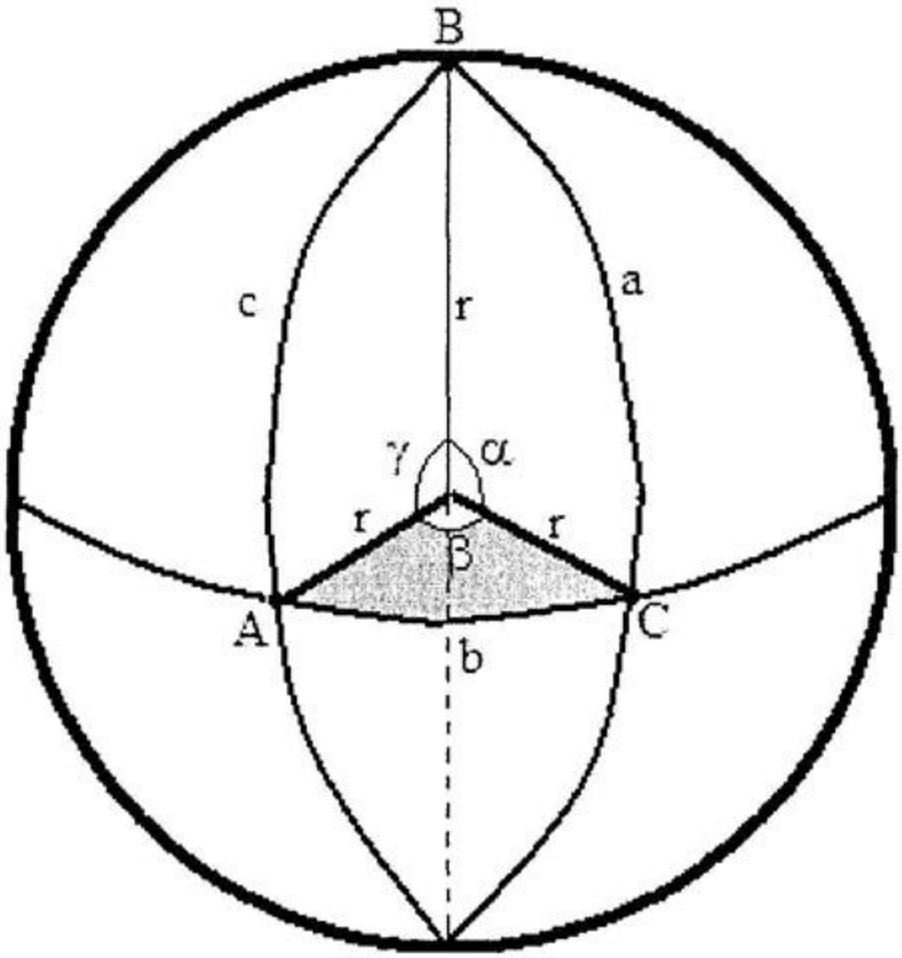
bulunur. $\gamma = 180^0$ olduğundan BOC noktaları bir doğru üzerindedir ve üçgen oluşturmaz, yüzölçüm değeri yoktur.

Taralı kısmın yüzölçümü F_T;

$$F_T = F - f_1 - f_2 = 20753.712 \text{ cm}^2$$

biçiminde hesaplanır.

KÜRESEL ÜÇGENLER

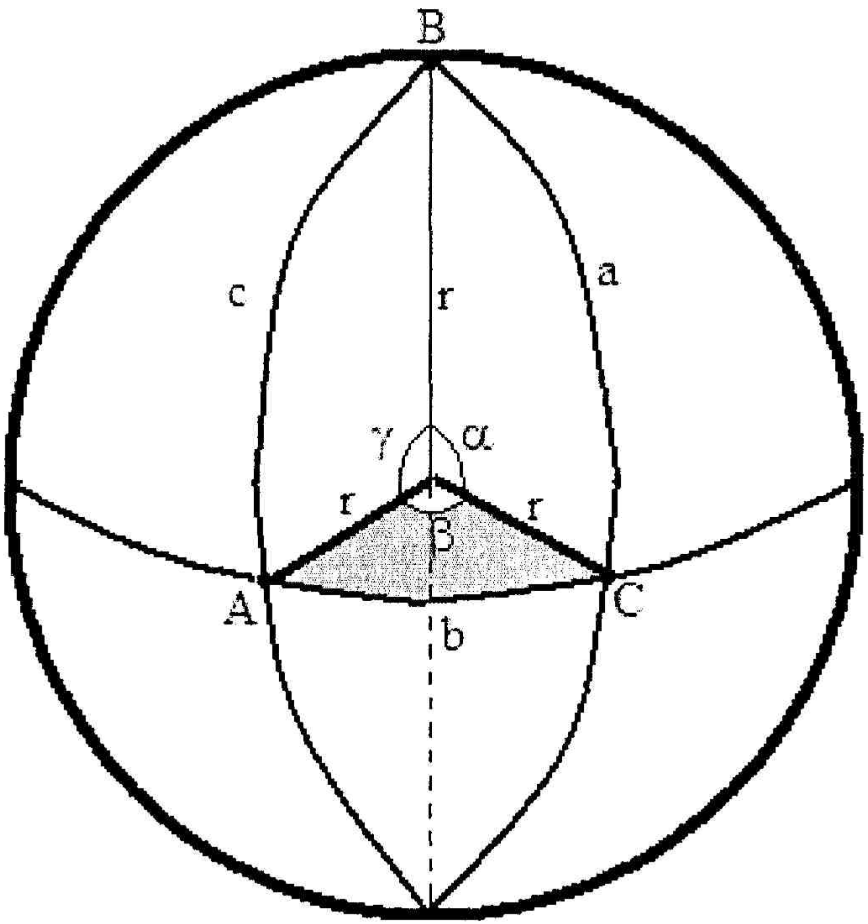


TANIMLAR

Uzayda sabit bir noktadan uzaklıkları sabit olan noktalar geometrik bir yüzey oluşturur. Bu **yüzeye küresel** yüzey, bu yüzeyle çevrelenmiş cisme **küre** adı verilir. Küre aynı zamanda bir yarım dairenin çap etrafında 360° döndürülmesi veya tam bir dairenin herhangi bir çap etrafında 180° döndürülmesiyle de oluşturulabilir.

Bir kürenin herhangi bir düzlemle arakesiti bir **daire**dir. Kürenin, merkezden geçen bir düzlemle arakesitine **büyük daire**, kürenin merkezinden geçmeyen, ancak küreyi kesen bir düzlemle arakesitine **küçük daire** denir. Yeryuvarı üzerinde meridyen daireleri ve ekvator birer büyük daire, enlem çizgileri de birer küçük daire örneğidir.

Küre üzerinde bulunan herhangi iki nokta arasındaki küre yüzeyi arasındaki uzaklık, bu iki noktadan geçen büyük daire yayı ile ölçülür. Bu şekilde tanımlanan uzaklığa **küresel uzaklık** denir. Yüzeyi küre olan bir cisim üzerinde verilen iki nokta arasındaki en kısa uzaklık aynı zamanda küresel uzaklıktır. Bu uzaklık, büyük dairenin yarısından büyük olamaz. Bir büyük daire çevresinin dörtte birine **kadran** denir.



Küre yüzeyi üzerinde iki büyük daire yayı arasında kalan açıklığa **küresel açı** denir. Bu açı her iki büyük daire düzlemleri arasındaki ölçek açı ile ölçülür. Küre üzerindeki uzunluk, kürenin merkezinde bu uzunluğa karşılık gelen merkez açı ile ölçülür. Açı ve uzunluk arasındaki dönüşümler daha önce tanımlanan küçük açı bağıntılarıyla yapılır. Şekilde a, b ve c küresel uzunluklar veya küre üzerindeki eğri uzunluklardır. α, β ve γ açıları da küresel açı tanımındadır.

Kenarları büyük daire yaylarından oluşan küre üzerindeki üçgenlere genel olarak **küresel üçgen** denir. Tanım olarak küresel üçgenlerin kenarları 180^o veya 200^g değerinden büyük olmamaları gerekmektedir.

Bu özellikteki küresel üçgenler **Euler Üçgeni** adı verilir. Şekildeki küresel üçgenin kenarları büyük daire yayları üzerinde yer almaktadır.

Bir küresel üçgenin iç açıları toplamının 180^o veya 200^g değerinden olan farkına **ekses (küresel artık)** adı verilir ve ε ile gösterilir. Bir küresel üçgenin iç açıları α, β, γ ile gösterilirse bu üçgenin ekses değeri;

$$\varepsilon = \alpha^o + \beta^o + \gamma^o - 180^o$$

veya

$$\varepsilon = \alpha^g + \beta^g + \gamma^g - 200^g$$

şeklinde hesaplanır.

Bir küresel üçgenin küre yüzeyinde kapladığı F yüzölçüm değeri;

$$F = \frac{\varepsilon}{\rho} * r^2$$

şeklinde hesaplanır. Burada r kürenin yarıçapını, ε küresel üçgenin eksek değerini gösterir. ρ değeri derece, grad veya radyan birimine göre yazılır.

Örnek; Küre olarak kabul edilen yeryuvarının yarıçapı r = 6373.395 km ise, ekses değeri 1^g olan bir küresel üçgenin yüzölçüm değeri nedir?

$$F = \frac{\varepsilon}{\rho} * r^2 \text{ bağıntısı ile}$$

$$F = \frac{1}{\frac{200}{\pi}} * 6373395^2 = 638060.0413 \text{ km}^2$$

olarak hesaplanır.

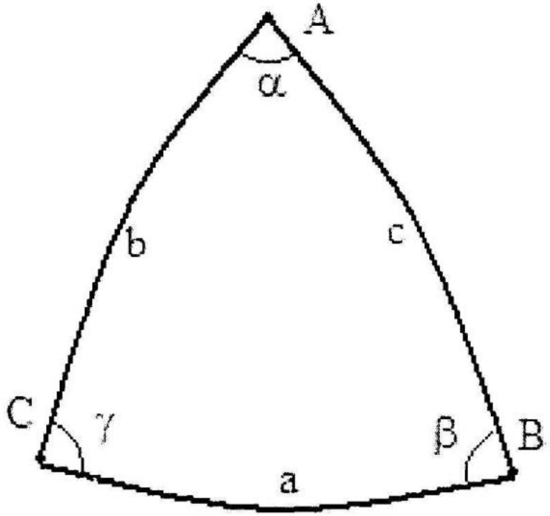
KÜRESEL ÜÇGENİN ÖZELLİKLERİ

1. Bir küresel üçgenin iç açılarının toplamı 200^g değerinden büyük 600^g değerinden küçüktür.

$$200^g < \alpha + \beta + \gamma < 600^g$$

Açılar cinsinden verilen kenarlar için ise; küresel üçgenin üç kenarının toplamı $0 - 400^g$ arasında değer alır.

$$0^g < a + b + c < 400^g$$



2. Düzlem üçgenlerde olduğu gibi, bir küresel üçgende iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyük, iki kenarın farkı üçüncü kenardan küçüktür. Yine iki açısı eşit olan üçgenin bu açılar karşısındaki kenarlar da birbirine eşittir. Bir küresel üçgende diğerine göre büyük olan açı karşısında büyük kenar bulunur. Benzer şekilde büyük kenar karşısındaki açı da diğerine göre büyüktür.

KÜRESEL ÜÇGENLERDE TEMEL BAĞINTILAR

Küresel üçgenlerin çözümünde aşağıda kısaca yazılan bağıntılardan başka çok sayıda bağıntıda mevcuttur. Söz konusu bağıntıların birçoğu hesaplama aracı olarak logaritmanın kullanıldığı dönemlerde geliştirilmiştir. Günümüzde elektronik hesaplama araçları kullanıldığından bazı bağıntılar artık kullanılmamaktadır.

Yukarıdaki şekildeki gibi çizilen bir küresel üçgende yazılacak **sinüs bağıntısı;**

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = m$$

şeklindedir. Aynı üçgen için **kenar kosinüs bağıntısı;**

$$\cos a = \cos b * \cos c + \sin b * \sin c * \cos\alpha$$

$$\cos b = \cos c * \cos a + \sin c * \sin a * \cos\beta$$

$$\cos c = \cos a * \cos b + \sin a * \sin b * \cos\gamma$$

şeklinde yazılmaktadır. Bu bağıntılarla uzunluklar hesaplanır. Küresel üçgenin açıları için **açı kosinüs bağıntısı;**

$$\cos\alpha = -\cos\beta * \cos\gamma + \sin\beta * \sin\gamma * \cos a$$

$$\cos\beta = -\cos\gamma * \cos\alpha + \sin\gamma * \sin\alpha * \cos b$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta * \cos c$$

şeklinde yazılmaktadır. Bu bağıntıda kenarlar yalnız bırakılırsa,

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta * \cos\gamma}{\sin\beta * \sin\gamma}$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\gamma * \cos\alpha}{\sin\gamma * \sin\alpha}$$

$$\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\beta * \cos\alpha}{\sin\beta * \sin\alpha}$$

eşitlikleri elde edilir ve üç açısı verilen küresel üçgenin çözümü yapılır.

Neper bağıntıları ise iki kenar ve bu kenarlardan birinin karşısındaki açı veya iki açı ve bu açılardan birinin karşısındaki kenar verildiğinde kullanılmaktadır. Neper bağıntısının kenar hesabında;

açı hesabında

$$\tan\frac{c}{2} = \tan\frac{a+b}{2} * \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \cot\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2} * \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$$

$$\tan\frac{b}{2} = \tan\frac{a+c}{2} * \frac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}} \qquad \cot\frac{\beta}{2} = \tan\frac{\alpha+\gamma}{2} * \frac{\cos\frac{a+c}{2}}{\cos\frac{a-c}{2}}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \tan\frac{c+b}{2} * \frac{\cos\frac{\gamma+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma-\beta}{2}} \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\gamma+\beta}{2} * \frac{\cos\frac{c+b}{2}}{\cos\frac{c-b}{2}}$$

eşitlikleri kullanılmaktadır.

KÜRESEL ÜÇGEN ÇÖZÜMLERİ

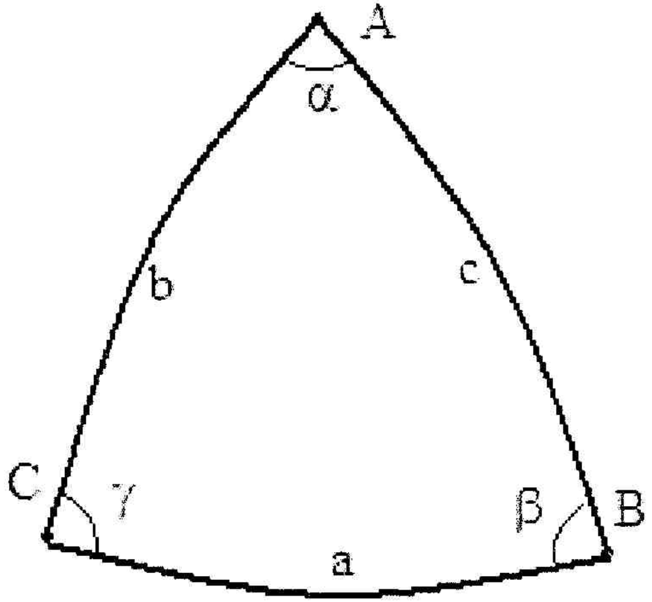
Bir küresel üçgende üçü açı, üçü kenar olmak üzere altı eleman vardır. Bu altı elemanın herhangi üçü verildiğinde diğerleri ve yüzölçüm değeri bulunabilmektedir. Bu özelliğe göre altı adet küresel üçgen çözüm şekli karşımıza çıkar. Aşağıda bu küresel üçgenlerin çözümleri örnekler üzerinde anlatılmıştır.

Örnek; Aşağıda elemanları verilen küresel üçgenin diğer ana elemanlarını, küresel artık ekses değerini hesaplayınız?

$a = 86.88179^g$,

$b = 125.10772^g$

$c = 57.56265^g$



Bu örnekte üç kenarı açı cinsinden verilen bir küresel üçgen vardır. Kenar kosinüs bağıntıları uygulanarak;

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b * \cos c}{\sin b * \sin c} \text{ ile}$$

$$\cos\alpha = 0.609424184 \Rightarrow \alpha = 58.28013^g$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos c * \cos a}{\sin c * \sin a} \text{ ile}$$

$$\cos\beta = -0.66392606 \Rightarrow \beta = 146.22221^g$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos b * \cos a}{\sin b * \sin a} \text{ ile}$$

$$\cos\gamma = 0.771207342 \quad \Rightarrow \gamma = 43.93063^g$$

$$\varepsilon = \alpha^g + \beta^g + \gamma^g - 200^g = 48.43864^g$$

Örnek; Aşağıda elemanları verilen küresel üçgenin diğer elemanlarını hesaplayınız?

$$\alpha = 122.97099^g,\ \beta = 91.43765^g,\ \gamma = 79.49475^g$$

Bu örnekte üç açısı verilen bir küresel üçgen vardır. Açı kosinüs bağıntıları uygulanarak;

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta * \cos\gamma}{\sin\beta * \sin\gamma}$$

$$\cos a = -0.33042402 \Rightarrow a = 121.43435^g$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\gamma * \cos\alpha}{\sin\gamma * \sin\alpha}$$

$$\cos b = 0.025163758 \Rightarrow b = 98.39786^g$$

$$\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\beta * \cos\alpha}{\sin\beta * \sin\alpha}$$

$$\cos c = 0.29036579 \Rightarrow c\ 81.24460^g =$$

küresel üçgenin üç kenarı hesaplanır.

__Örnek;__ Aşağıda elemanları verilen küresel üçgenin diğer elemanlarını hesaplayınız?

$$\alpha = 61.34753^g,\ \beta = 136.17500^g,\ c = 80.88210^g$$

Bu örnekte iki açı ve aralarındaki uzunluk verilmiştir. Açı kosinüs ve sinüs bağıntıları kullanılarak;

$$\cos\gamma = -\cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta * \cos c \text{ ile}$$

$$\cos\gamma = 0.511792391 \quad \Rightarrow \gamma = 65.79634^g$$

$$\sin a = \frac{\sin\alpha * \sin c}{\sin\gamma}$$

$$\sin a = 0.913180494 \quad \Rightarrow \; a = 73.27627^g$$

$$\sin b = \frac{\sin\beta * \sin c}{\sin\gamma} \text{ ile}$$

$$\sin b = 0.937170208 \quad \Rightarrow \; b = 77.31293^g$$

sonuçları hesaplanır.

Örnek; Aşağıda elemanları verilen küresel üçgenin diğer elemanlarını hesaplayınız?

$$\alpha = 125.14383^g,\ \beta = 72.56636^g,\ b = 78.74907^g$$

Bu örnekte iki açı ve bu açılardan birinin karşısındaki kenar verilmiştir. Sinüs ve neper bağıntıları kullanılarak;

$$\sin a = \frac{\sin\alpha * \sin b}{\sin\beta} \text{ ile}$$

$$\sin a = 0.959810204 \Rightarrow a = 81.89000^g$$

$$\tan\frac{c}{2} = \tan\frac{a+b}{2} * \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$ neper bağıntısından

$$\tan\frac{c}{2} = 0.061473787 \quad \Rightarrow c = 7.81725^{g}$$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2} * \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = 16.92043845 \quad \Rightarrow \gamma = 7.51612^{g}$$

sonuçları hesaplanır.

Teşekkürler