

Analiz I - 10.Uygulama

Rolle Teoremi, Ortalama Değer Teoremi ve Ekstremum Problemleri

10.12.2025

Rolle Teoremi Problemleri

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun $[1, 3]$ aralığında Rolle Teoremi şartlarını sağladığını gösteriniz ve uygun c sayısını bulunuz.

Çözüm: 1. Fonksiyon polinom olduğu için $[1, 3]$ aralığında sürekli ve $(1, 3)$ aralığında türevidir.

2. $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ ve $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$. Şartlar sağlanır.

3. $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2$. ($c \in (1, 3)$).

2. $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonu için $[-1, 1]$ aralığında Rolle Teoremi'ni sağlayan c değerlerini bulunuz.

Çözüm: 1. Polinom fonksiyon sürekli ve türevidir. $f(-1) = 0, f(1) = 0$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1/3 \Rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[0, 2\pi]$ aralığında Rolle Teoremi'ni sağlar mı? Sağlıyorsa c değerleri nedir?

Çözüm: 1. $\sin x$ her yerde sürekli ve türevidir. $f(0) = 0, f(2\pi) = 0$.

2. $f'(x) = \cos x = 0$. $[0, 2\pi]$ aralığında kökler: $c_1 = \frac{\pi}{2}, c_2 = \frac{3\pi}{2}$.

4. $f(x) = x^4 - 2x^2$ fonksiyonu için $[-2, 2]$ aralığında c değerlerini bulunuz.

Çözüm: 1. $f(-2) = 16 - 8 = 8, f(2) = 8$.

2. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$.

3. Kökler: $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1$. Hepsi $(-2, 2)$ aralığındadır.

5. $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ fonksiyonu $[1, 2]$ aralığında uygun c değerini bulunuz.

Çözüm: 1. $f(1) = 0, f(2) = 0$.

2. $f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow c = 1.5$.

6. $f(x) = x^3 + 4x - 1$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında tam olarak bir tane kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 1. **Varlık (Ara Değer Teoremi):** $f(0) = -1$ (Negatif) ve $f(1) = 1 + 4 - 1 = 4$ (Pozitif). Fonksiyon işaret değiştirdiği için arada en az bir kök vardır.

2. **Teklik (Rolle Teoremi Mantığı):** Türev alalım: $f'(x) = 3x^2 + 4$. $x^2 \geq 0$ olduğundan $f'(x)$ her zaman pozitifdir ($f'(x) > 0$). Fonksiyon sürekli artandır. Sürekli artan bir fonksiyon x eksenini birden fazla kez kesemez. O halde sadece 1 kök vardır.

7. $\cos x = x$ denkleminin $(0, 1)$ aralığında sadece bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Denklemi $f(x) = x - \cos x = 0$ olarak düzenleyelim.

1. **Varlık:** $f(0) = 0 - 1 = -1$ (Negatif). $f(1) = 1 - \cos(1)$. ($\cos 1 < 1$ olduğundan sonuç pozitiftir). İşaret değişimi var, en az bir kök mevcut.

2. **Teklik:** $f'(x) = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x$. $(0, 1)$ aralığında $\sin x$ pozitiftir, dolayısıyla $f'(x) > 0$ 'dır. Türev sıfır olamadığı için (Rolle Teoremi gereği) birden fazla kök olamaz. Tek kök vardır.

8. $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 4$ fonksiyonunun reel sayılarda birden fazla kökü olabilir mi?

Çözüm: Hayır, olamaz. 1. $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$. 2. Çift kuvvetler negatif olamaz ($x^4 \geq 0, x^2 \geq 0$). Dolayısıyla $f'(x) \geq 2$ olur. 3. Türev daima pozitiftir ($f'(x) \neq 0$). Rolle teoremine göre, eğer iki kök ($f(a) = f(b) = 0$) olsaydı, türevin sıfır olduğu bir yer olmalıydı. Türev hiç sıfır olmadığına göre birden fazla kök yoktur.

9. **Soru (Klasik Rolle Sorusu):** $a_0, a_1, \dots, a_n$ reel sayılar olmak üzere,

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ polinomunun $(0, 1)$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu soruda $P(x)$ 'in integralini (ilkel fonksiyonunu) düşünmeliyiz.

1. $F(x) = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

2. $F(0) = 0$ olduğu açıktır.

3. $F(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1}$. Soruda bu toplamın 0 olduğu verilmiş. Yani $F(1) = 0$.

4. $F(0) = 0$ ve $F(1) = 0$ olduğundan, Rolle Teoremi gereği $(0, 1)$ aralığında $F'(c) = 0$ olacak şekilde bir c sayısı vardır.

5. $F'(x) = P(x)$ olduğuna göre, $P(c) = 0$ olur. Yani $P(x)$ 'in bu aralıkta bir kökü vardır.

Ortalama Değer Teoremi Problemleri

10. $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $[0, 2]$ aralığında ODT'yi sağlayan c sayısını bulunuz.

Çözüm: Formül: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1. $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4-0}{2} = 2$.

2. $f'(x) = 2x \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$.

11. $f(x) = x^3 + x - 1$ fonksiyonu için $[0, 2]$ aralığında c değerini bulunuz.

Çözüm: 1. $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{9-(-1)}{2} = 5$.

2. $f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow 3c^2 + 1 = 5 \Rightarrow c^2 = 4/3$.

3. $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (Aralıkta olan pozitif kök).

12. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu için $[0, 4]$ aralığında c sayısını bulunuz.

Çözüm: 1. Eğim: $\frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$.

2. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$.

13. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için $[1, 4]$ aralığında c değerini bulunuz.

Çözüm: 1. Eğim: $\frac{1/4-1}{3} = \frac{-3/4}{3} = -1/4$.

2. $f'(x) = -1/x^2 \Rightarrow -1/c^2 = -1/4 \Rightarrow c = 2$.

14. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ fonksiyonu için $[-1, 2]$ aralığında c sayısını bulunuz.

Çözüm: 1. $f(-1) = 4, f(2) = 19$. Eğim: $\frac{19-4}{3} = 5$.

2. $f'(x) = 4x + 3 \Rightarrow 4c + 3 = 5 \Rightarrow c = 0.5$.

Yerel Ekstreum

15. $f(x) = x^4 - 4x^3$ yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 4x^2(x-3)$. Kritik noktalar 0 ve 3. $x = 0$ 'da işaret değişmez. $x = 3$ 'te azalandan artana geçer. Yerel Min: $(3, -27)$.

16. $f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ aralığındaki mutlak ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: Kritik noktalar: $3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. $f(-3) = 9, f(-2) = 16, f(2) = -16, f(3) = -9$. Mutlak Maks: 16, Mutlak Min: -16.

17. $f(x) = xe^x$ yerel minimum noktasını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1$. İşaret azalandan artana geçer. Yerel Min: $(-1, -1/e)$.

18. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$. Kökler 0, 1, -1. $f''(x)$ testi ile: $x = 0$ Yerel Maks, $x = \pm 1$ Yerel Min.

Maks.-Min. Problemleri

19. Toplamları 20 olan iki pozitif sayının çarpımı en çok kaç olabilir?

Çözüm: $y = 20 - x$. $P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$. $P'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$. Çarpım: 100.

20. Çarpımları 100 olan iki pozitif sayının toplamı en az kaç olabilir?

Çözüm: $T(x) = x + 100/x$. $T'(x) = 1 - 100/x^2 = 0 \Rightarrow x = 10$. Toplam: 20.

21. Çevresi 40 m olan dikdörtgenin alanı en fazla kaç m^2 dir?

Çözüm: $x + y = 20 \Rightarrow A(x) = x(20 - x)$. $A'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$. Alan: 100.

22. Kenarı 12 cm olan kare kartondan üstü açık kutu yapılıyor. Hacim maksimum ise kesilen pay (x) kaç cm?

Çözüm: $V(x) = x(12 - 2x)^2$. $V'(x) = 12(x - 6)(x - 2) = 0$. $x = 6$ olamaz, $x = 2$ cm olmalı.

23. $y = 4 - x^2$ parabolü içine çizilen en büyük alanlı dikdörtgenin boyutları?

Çözüm: $A(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$. $A'(x) = 8 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Taban: $\frac{4}{\sqrt{3}}$, Yükseklik: $8/3$.

24. Hacmi 16π olan silindirin yüzey alanını minimize eden yarıçap?

Çözüm: $h = 16/r^2$. $A(r) = 2\pi r^2 + 32\pi/r$. $A'(r) = 4\pi r - 32\pi/r^2 = 0 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$.

25. $f(x) = x + 1/x$ ($x > 0$) minimum değeri?

Çözüm: $f'(x) = 1 - 1/x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$. $f(1) = 2$.

26. Alanı 36 olan dikdörtgenin en küçük çevresi?

Çözüm: $C(x) = 2(x + 36/x)$. $C'(x) = 2 - 72/x^2 = 0 \Rightarrow x = 6$. Çevre: $2(6 + 6) = 24$.

27. a yarıçaplı bir çember içine çizilebilen dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

Çözüm: $x^2 + y^2 = a^2$, $A = x.y = x.\sqrt{a^2 - x^2}$

$$A'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 = a^2 - x^2 \\ &\Rightarrow 2x^2 = a^2, \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dikdörtgenin alanı en fazla

$$A(2) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2}{2} \text{ olur.}$$

28. Köşeleri orijin, x- eksen, y- eksen ve $y = 4 - x^2$ parabolü üzerinde bulunan bir dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

Çözüm: $A = x.y = x(4 - x^2)$

$$A'(x) = 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

29. İki köşesi x- eksen, iki köşesi de $y = 16 - 3x^2$ parabolü üzerinde bulunan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanın alanını bulunuz.

Çözüm: $\frac{A}{2} = x(16 - 3x^2)$

$$A = 2x(16 - 3x^2)$$

$$A'(x) = 32 - 18x^2$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$A_{\max} = 2 \cdot \frac{4}{3} \left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{32}{3} = \frac{256}{9}$$

30. Yarıçapı a olan bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel silindirin hacmi en fazla ne olabilir?

Çözüm: $V = \pi r^2.h$

$$(2r)^2 + h^2 = (2a)^2$$

$$h^2 = 4(a^2 - r^2)$$

$$h = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

$$V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\begin{aligned}
V'(r) &= 4\pi r \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\
V'(r) &= 0 \Leftrightarrow 4\pi r \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow 4\pi r(a^2 - r^2) &= 2\pi r^3 \Leftrightarrow a^2 - r^2 = \frac{r^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \\
V &= \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\right)^2 \cdot 2\sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{4}{3}a^2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3
\end{aligned}$$

31. a yarıçaplı bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel dik koniler içinde hacmi en fazla olanın hacmini hesaplayınız.

Çözüm: $r^2 = a^2 - (h - a)^2 = 2ah - h^2$ olduğundan

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(2ah - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2ah^2 - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4ah - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{4a}{3}$$

Maksimum hacim

$$V\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2a \cdot \frac{16a^2}{9} - \frac{64}{27}a^3\right) = \frac{32}{81}\pi a^3$$