

Analiz I 13.Uygulama

Final Öncesi

Bölüm 1: Diziler ve Limitler

Soru 1: Genel terimi $a_n = \frac{3n^2-5n+1}{2n^2+4}$ olan dizinin limitini bulunuz.

Çözüm: Dizinin limiti $n \rightarrow \infty$ iken incelenir. Pay ve paydadaki en yüksek dereceli terim parantezine alalım (n^2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3 - 5/n + 1/n^2)}{n^2(2 + 4/n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 5/n + 1/n^2}{2 + 4/n^2}$$

$n \rightarrow \infty$ iken $1/n$ ve $1/n^2$ terimleri 0'a gider.

$$\text{Sonuç: } \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

Soru 2: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $x = 2$ yazıldığında $0/0$ belirsizliği oluşur. Çarpanlara ayırma yöntemi uygulanır.

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \quad \text{ve} \quad x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$$

$x = 2$ yerine yazılırsa:

$$\frac{2^2 + 2(2) + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3$$

Soru 3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{3x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: Temel trigonometrik limit kuralını hatırlayalım: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. İfadeyi benzetmek için pay ve paydayı düzenleyelim:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(5x)}{5x}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{5}{3} = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Bölüm 2: Süreklilik

Soru 4:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ x^2 + b, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için sürekli ise a ve b değerlerini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun $x = 1$ noktasında sürekli olması için $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ olmalıdır. 1. Sol Limit ($x \rightarrow 1^-$): $2(1) + a = 2 + a$ 2. Görüntü ($f(1)$): 5 3. Sağ Limit ($x \rightarrow 1^+$): $1^2 + b = 1 + b$

Eşitlikleri kuralım: $2 + a = 5 \Rightarrow a = 3$ $1 + b = 5 \Rightarrow b = 4$

Soru 5: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm: Rasyonel fonksiyonlar paydanın 0 olduğu noktalarda tanımsızdır ve dolayısıyla süreksizdir.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$$

Kökler $x = 2$ ve $x = 3$. Bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

Bölüm 3: Türev Alma Teknikleri

Soru 6: $f(x) = (x^3 + 2x)^4$ fonksiyonunun türevini bulunuz (Zincir Kuralı).

Çözüm: $u = x^3 + 2x$ dersek $y = u^4$ olur. $y' = 4u^3 \cdot u'$.

$$f'(x) = 4(x^3 + 2x)^3 \cdot \frac{d}{dx}(x^3 + 2x)$$

$$f'(x) = 4(x^3 + 2x)^3 \cdot (3x^2 + 2)$$

Soru 7: $y = x^2 \sin(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz (Çarpım Kuralı).

Çözüm: $(uv)' = u'v + uv'$.

$$y' = (x^2)' \sin(x) + x^2 (\sin x)'$$

$$y' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Soru 8: $y = \frac{\ln x}{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz (Bölüm Kuralı).

Çözüm: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{(\frac{1}{x}) \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Soru 9: $y = \arctan(e^{2x})$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ kuralını uygulayalım. Burada $u = e^{2x}$.

$$y' = \frac{(e^{2x})'}{1 + (e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \cdot 2}{1 + e^{4x}} = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

Soru 10: $x^2 + y^2 - 3xy = 5$ eğrisinin y' türevini (kapalı türev) bulunuz.

Çözüm: Her iki tarafın x 'e göre türevini alalım (y 'nin x 'in fonksiyonu olduğunu unutmayalım):

$$2x + 2y \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

$$2x + 2yy' - 3y - 3xy' = 0$$

y' içeren terimleri paranteze alalım:

$$y'(2y - 3x) = 3y - 2x$$

$$y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x}$$

Soru 11: $y = x^{\sin x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz (Logaritmik Türev).

Çözüm: Değişken üs olduğu için her iki tarafın doğal logaritmasını ($\ln$) alalım:

$$\ln y = \ln(x^{\sin x}) \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$$

Şimdi her iki tarafın türevini alalım:

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

y' 'yi karşıya çarpım olarak atıp yerine yazalım ($y = x^{\sin x}$):

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

Bölüm 4: Belirsiz Şekiller (L'Hopital)

Soru 12: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ limitini hesaplayınız ($0/0$ Belirsizliği).

Çözüm: $x = 0$ için $\frac{1-1-0}{0} = \frac{0}{0}$. L'Hopital uygulayalım (pay ve paydanın ayrı ayrı türevi):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Hala $x = 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. Tekrar L'Hopital uygulayalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Soru 13: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ limitini hesaplayınız ($0 \cdot \infty$ Belirsizliği).

Çözüm: İfadeyi $\frac{\infty}{\infty}$ formuna getirmek için düzenleyelim:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \text{ formu} \right)$$

L'Hopital uygulayalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Soru 14: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$ limitini hesaplayınız (1^∞ Belirsizliği).

Çözüm: $y = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$ diyelim ve $\ln$ alalım:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(1 + 2/x)}{1/x}$$

Bu $\frac{0}{0}$ belirsizliğidir. L'Hopital uygulayalım:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{-2/x^2}{1+2/x}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{2}{1+2/x}}{1} = 3 \cdot 2 = 6$$

$\ln y \rightarrow 6$ olduğuna göre, limit $y = e^6$ 'dır.

Bölüm 5: Türevin Geometrik Yorumu

Soru 15: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ parabolüne $x = 3$ apsisli noktadan çizilen teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm: 1. Noktayı bulalım: $y_0 = f(3) = 3^2 - 4(3) + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$. Nokta: $(3, -2)$. 2. Eğimi bulalım ($m_T = f'(3)$): $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(3) = 2(3) - 4 = 2$. Eğim $m = 2$. 3. Doğru denklemi ($y - y_0 = m(x - x_0)$):

$$y - (-2) = 2(x - 3) \Rightarrow y + 2 = 2x - 6 \Rightarrow y = 2x - 8$$

Soru 16: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğet doğruları x -eksenine paraleldir?

Çözüm: x -eksenine paralel demek, eğimin (türevin) 0 olması demektir.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

Kökler: $x = 0$ ve $x = 2$. Noktalar: $x = 0 \Rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$ $x = 2 \Rightarrow y = 2^3 - 3(2^2) + 5 = 8 - 12 + 5 = 1 \rightarrow (2, 1)$

Bölüm 6: Ortalama Değer Teoremi (ODT)

Soru 17: $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $[0, 2]$ aralığında Ortalama Değer Teoremini sağlayan c sayısını bulunuz.

Çözüm: ODT'ye göre, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde en az bir $c \in (0, 2)$ vardır. $a = 0, b = 2$. $f(2) = 4, f(0) = 0$.

$$f'(c) = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(c) = 2c.$$

$$2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

Soru 18: $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında Rolle Teoremi şartlarını sağlar mı? Sağlıyorsa uygun c değerlerini bulunuz.

Çözüm: 1. Polinom olduğu için sürekli ve türevlenebilir. 2. $f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$ ve $f(1) = 1^3 - 1 = 0$. Uç değerler eşit. Şartlar sağlanır. Rolle teoremine göre $f'(c) = 0$ olmalı.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1/3 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Her iki değer de $(-1, 1)$ aralığındadır. $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bölüm 7: Maksimum - Minimum Problemleri

Soru 19: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: Türevi sıfır yapan noktaları (kritik noktalar) bulalım:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

Her tarafı 6'ya bölelim: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$. Kritik noktalar: $x = 1$ ve $x = 2$. Tablo yapalım: - $x < 1$ için f' pozitif (artan). - $1 < x < 2$ için f' negatif (azalan). - $x > 2$ için f' pozitif (artan). Sonuç: $x = 1$ noktasında yerel maksimum, $x = 2$ noktasında yerel minimum vardır.

Soru 20: Toplamları 12 olan iki pozitif sayının çarpımı en çok kaç olabilir?

Çözüm: Sayılara x ve y diyelim. $x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$. Çarpım fonksiyonu: $P(x) = x \cdot y = x(12 - x) = 12x - x^2$. Maksimum için türev alıp sıfıra eşitleyelim:

$$P'(x) = 12 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

$x = 6$ ise $y = 6$. Maksimum çarpım: $6 \cdot 6 = 36$.

Soru 21: Yarıçapı r ve yüksekliği h olan, üstü açık silindir şeklindeki bir kutunun hacmi $V = 27\pi$ birimküptür. Yüzey alanının minimum olması için taban yarıçapı r ne olmalıdır?

Çözüm: Hacim: $V = \pi r^2 h = 27\pi \Rightarrow h = \frac{27}{r^2}$. Yüzey Alanı (Taban + Yan Yüz): $A(r) = \pi r^2 + 2\pi r h$. h ifadesini yerine yazalım:

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{27}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$$

Türev alıp sıfıra eşitleyelim:

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = 0$$

$$2\pi r = \frac{54\pi}{r^2} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

Minimum alan için yarıçap 3 birim olmalıdır.

Bölüm 8: Türev ile Grafik Çizimi

Soru 22: $y = \frac{x-2}{x+1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz ve değişimini inceleyiniz.

Çözüm:

- **Düşey Asimptot:** Paydayı sıfır yapan değer $x = -1$ 'dir.

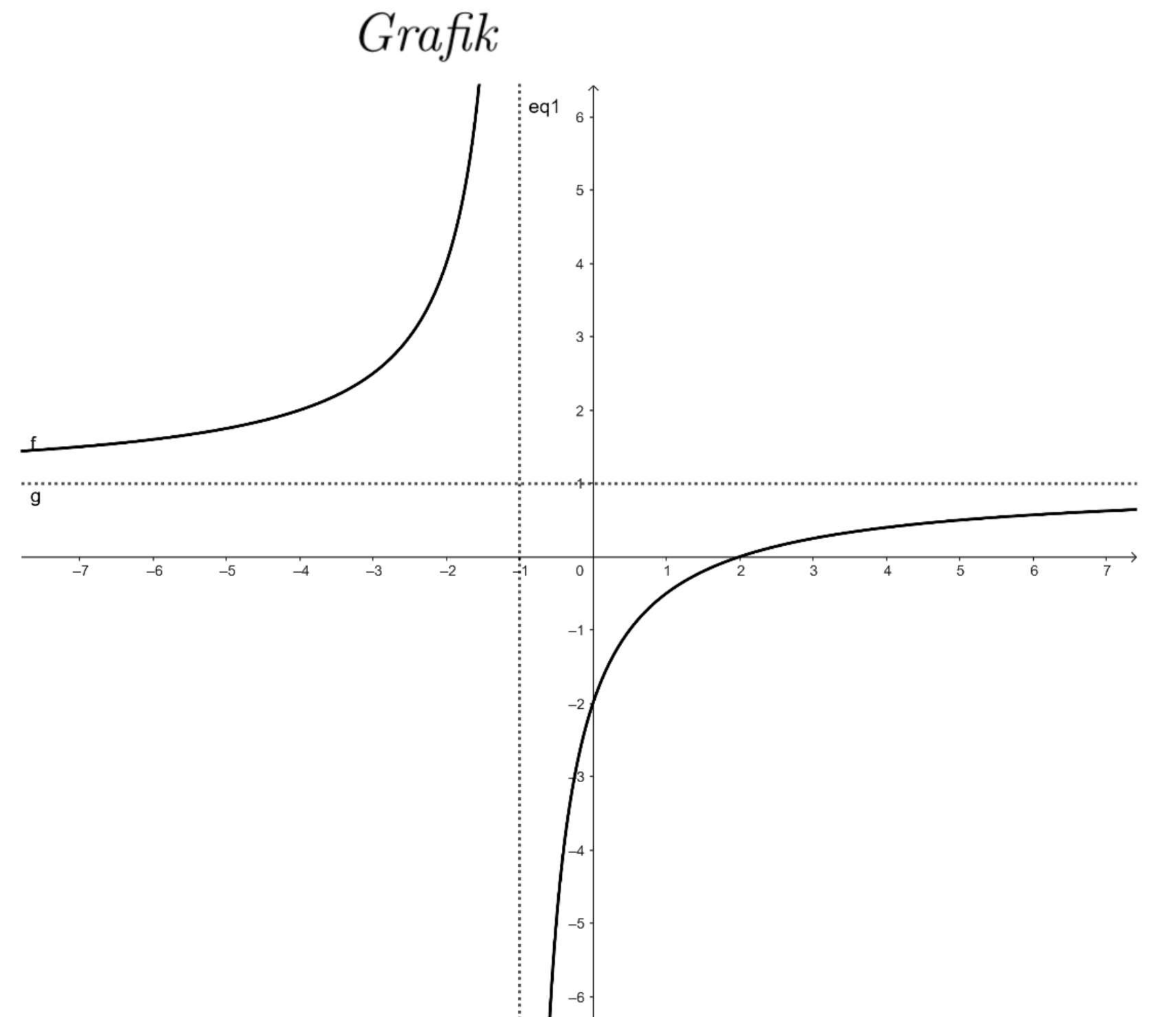
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$$

- **Yatay Asimptot:** Sonsuzdaki limit incelenir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$$

O halde $y = 1$ doğrusu yatay asimptottur.

- **Eksen Kesimleri:** $x = 0 \Rightarrow y = -2$ (y eksenini keser). $y = 0 \Rightarrow x = 2$ (x eksenini keser).



Soru 23: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıkları ve ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: Türev alıp köklerini bulalım:

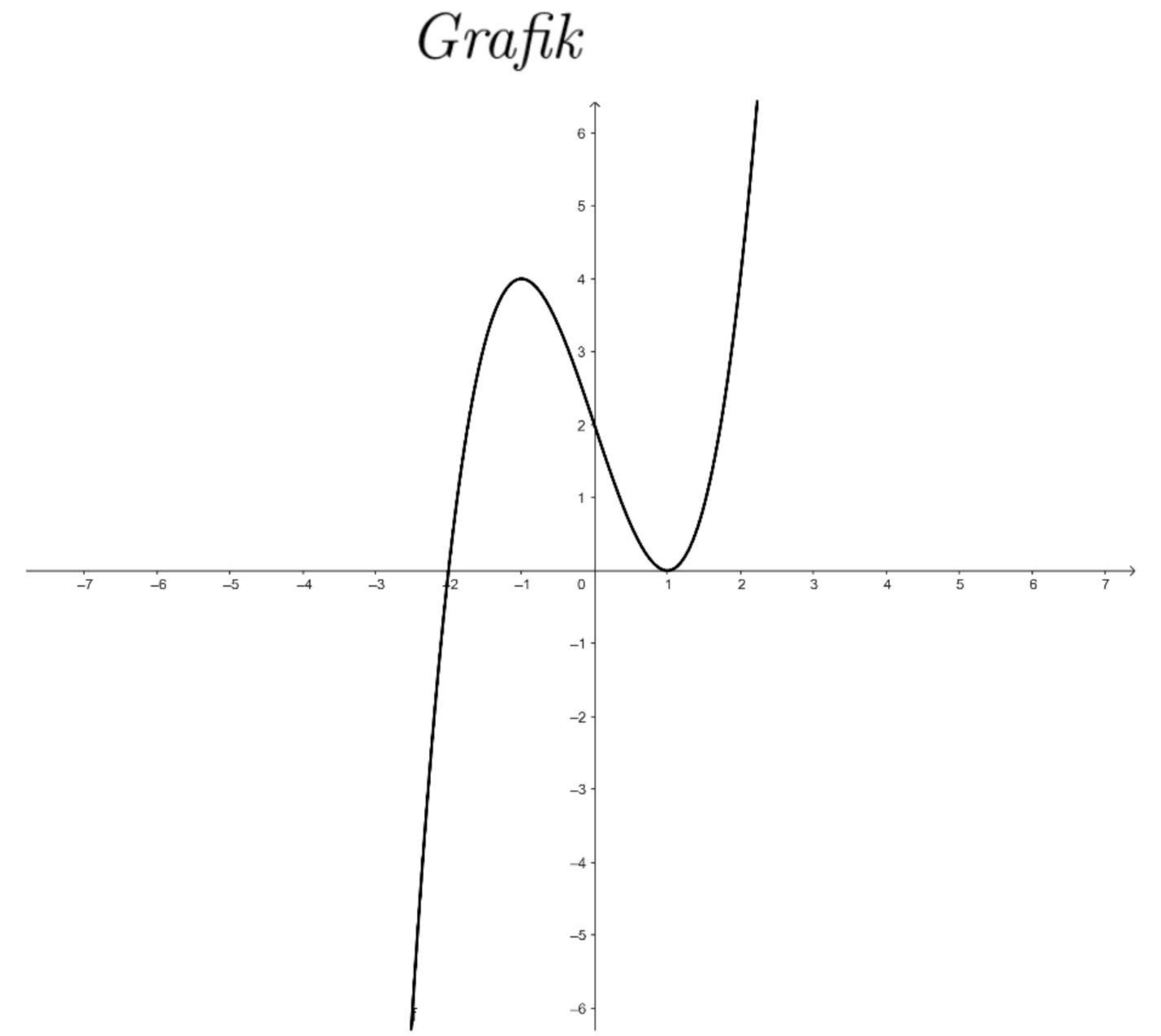
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

Kritik noktalar: $x = -1$ ve $x = 1$.

İşaret Tablosu:

- $x \in (-\infty, -1)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ Artan $\nearrow$
- $x \in (-1, 1)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow$ Azalan $\searrow$
- $x \in (1, \infty)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ Artan $\nearrow$

Ekstremum Değerler: $x = -1$ için yerel maks: $f(-1) = 4$. Nokta: $(-1, 4)$. $x = 1$ için yerel min: $f(1) = 0$. Nokta: $(1, 0)$.



Soru 24: $f(x) = x^4 - 6x^2$ fonksiyonunun bükeyliğini (konkavite) inceleyiniz ve büküm noktalarını belirleyiniz.

Çözüm: İkinci türevi inceleyelim:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

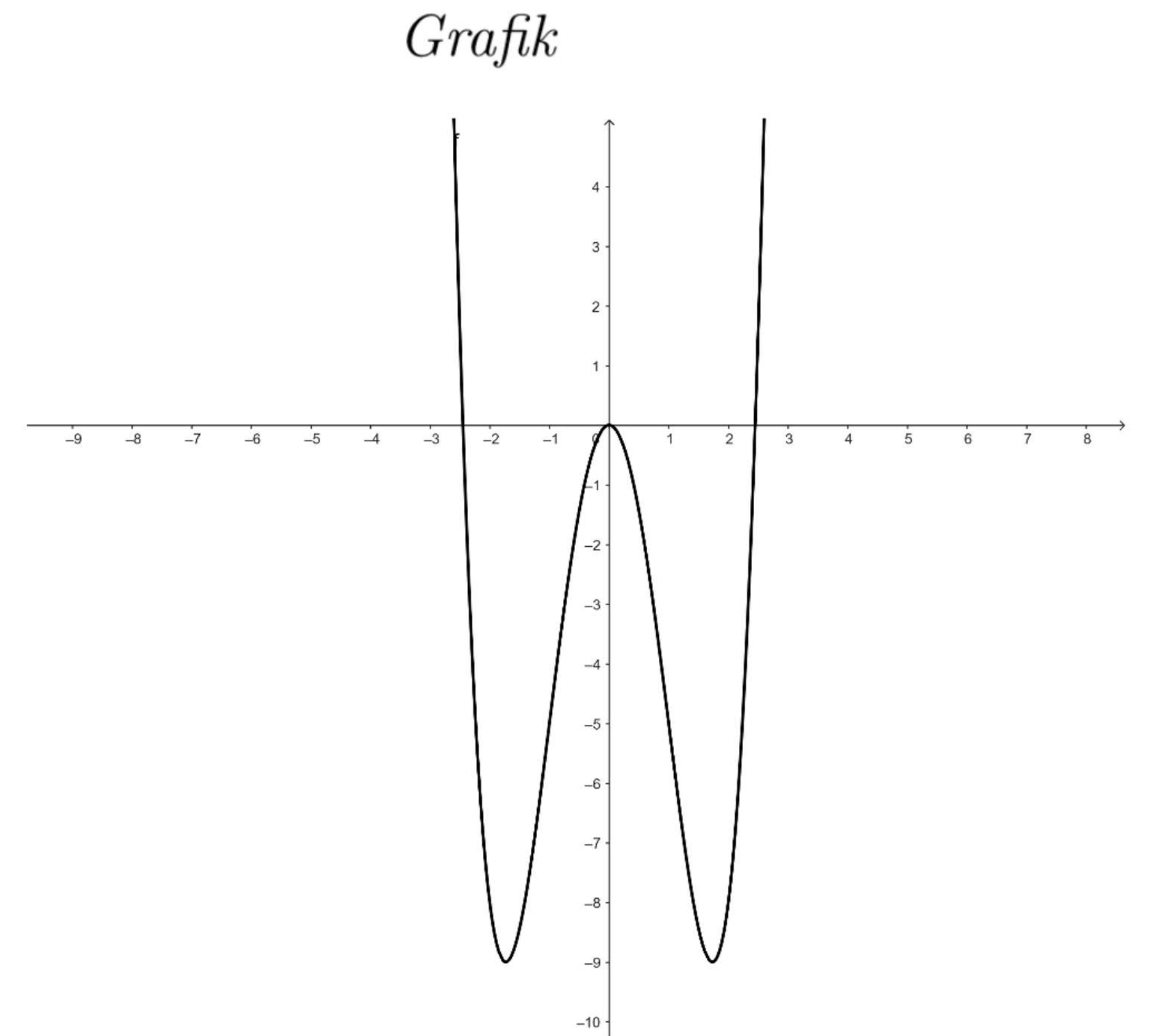
$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$$

$f''(x) = 0$ yapan değerler $x = -1$ ve $x = 1$.

Bükeylik Durumu:

- $(-\infty, -1)$: $f'' > 0 \Rightarrow$ Konveks (Yukarı) $\cup$
- $(-1, 1)$: $f'' < 0 \Rightarrow$ Konkav (Aşağı) $\cap$
- $(1, \infty)$: $f'' > 0 \Rightarrow$ Konveks (Yukarı) $\cup$

Büküm Noktaları: $x = -1 \Rightarrow y = -5$. Nokta: $(-1, -5)$. $x = 1 \Rightarrow y = -5$. Nokta: $(1, -5)$.



Soru 25: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1. **Tanım Kümesi:** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. **Düşey Asimptot:** $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

3. **Eğik Asimptot:** Derece farkı 1 olduğu için polinom bölmesi yapılır:

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Eğik asimptot doğrusu: $y = x + 1$.

4. **Türev ve Ekstremum:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Kökler: $x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. $x = 0$

Yerel Maks $(0, 0)$. $x = 2$ Yerel Min $(2, 4)$.

