

Analiz I 9.Uygulama

Türev ve Geometrik Yorumu

Sorular ve Çözümler

1. $f(x) = \sin^3(4x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonu $f(x) = (\sin(4x))^3$ olarak düşünmeliyiz. Burada zincir kuralını dıştan içe doğru (Kuvvet $\rightarrow$ Sinüs $\rightarrow$ İçerisi) uyguluyoruz.

$$f'(x) = 3(\sin(4x))^2 \cdot (\sin(4x))'$$

$$f'(x) = 3 \sin^2(4x) \cdot \cos(4x) \cdot (4x)'$$

$$f'(x) = 3 \sin^2(4x) \cdot \cos(4x) \cdot 4$$

$$\mathbf{f'(x) = 12 \sin^2(4x) \cos(4x)}$$

2. $y = x^2 \cdot \cos(3x^2 + 1)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: Burada hem çarpım kuralı hem de zincir kuralı vardır. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ kuralını uygulayalım:

$$y' = (x^2)' \cdot \cos(3x^2 + 1) + x^2 \cdot (\cos(3x^2 + 1))'$$

$$y' = 2x \cdot \cos(3x^2 + 1) + x^2 \cdot [-\sin(3x^2 + 1) \cdot (3x^2 + 1)']$$

$$y' = 2x \cos(3x^2 + 1) + x^2 \cdot [-\sin(3x^2 + 1) \cdot 6x]$$

Düzenlersek:

$$\mathbf{y' = 2x \cos(3x^2 + 1) - 6x^3 \sin(3x^2 + 1)}$$

3. $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}}$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

Çözüm: Önce karekök türevini, sonra içindeki bölümün türevini alırız. $u = \frac{2x-1}{3x+2}$ olsun. $y = \sqrt{u}$ ise $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ olur. Bölümün türevi (u'):

$$u' = \frac{(2)(3x+2) - (2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{6x+4-6x+3}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$$

Yerine yazalım:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}}} \cdot \frac{7}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2(3x+2)^2 \sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}}}$$

4. $y = x^{e^x}$ fonksiyonunun türevini logaritmik türev yardımıyla bulunuz.

Çözüm: Taban ve üs değişken olduğu için her iki tarafın $\ln$ 'i alınır:

$$\ln y = \ln(x^{e^x}) \Rightarrow \ln y = e^x \cdot \ln x$$

Şimdi her iki tarafın x 'e göre türevi alınır (Sol tarafta y 'nin fonksiyon olduğu unutulmamalı):

$$\frac{y'}{y} = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}$$

y' yalnız bırakılır ve y yerine x^{e^x} yazılır:

$$y' = x^{e^x} \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right)$$

5. $f(x) = x^2 \ln x$ fonksiyonunun 3. mertebeden türevini ($f'''(x)$) bulunuz.

Çözüm: Sırasıyla türev alarak ilerleyelim. 1. Türev (Çarpım Kuralı):

$$f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

2. Türev:

$$f''(x) = (2x \ln x)' + (x)' = \left(2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} \right) + 1$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3$$

3. Türev:

$$f'''(x) = (2 \ln x + 3)' = 2 \cdot \frac{1}{x} + 0 = \frac{2}{x}$$

6. $x^2 + y^2 = 25$ denklemi veriliyor. $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ ifadesini y cinsinden en sade biçimde bulunuz.

Çözüm: Önce 1. türevi bulalım (Kapalı Türev):

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

Şimdi y' ifadesinin tekrar türevini alarak y'' ifadesini bulalım (Bölüm Kuralı):

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{(x)' \cdot y - x \cdot (y)'}{y^2}$$
$$y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2}$$

Burada y' gördüğümüz yere yukarıda bulduğumuz $(-x/y)$ değerini yazmalıyız:

$$y'' = -\frac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

Sorunun başında $x^2 + y^2 = 25$ olarak verildiği için pay kısmına 25 yazarız:

$$y'' = -\frac{25}{y^3}$$

7. $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt{x-2}}{(2x+1)^5}$ fonksiyonunun türevini logaritmik türev yöntemiyle düzenleyerek bulunuz.

Çözüm: Her iki tarafın $\ln$ 'i alınır ve logaritma özellikleri kullanılır:

$$\ln y = 3 \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-2) - 5 \ln(2x+1)$$

Türev alalım:

$$\frac{y'}{y} = 3 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-2} - 5 \frac{2}{2x+1}$$

y karşıya çarpım olarak geçer:

$$y' = \left[\frac{(x+1)^3 \sqrt{x-2}}{(2x+1)^5} \right] \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{2x-4} - \frac{10}{2x+1} \right)$$

8. $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ kapalı fonksiyonu veriliyor. y' ifadesini bulunuz.

Çözüm: Her terimin türevi alınır. y türevi alınırken yanına y' çarpanı eklenir. Çarpım türevine dikkat edelim ($-9xy$ terimi için):

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 9(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 y' - 9y - 9xy' = 0$$

y' içeren terimler bir tarafa toplanır:

$$y'(3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2$$

$$y' = \frac{9y - 3x^2}{3y^2 - 9x} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

9. $\sin(xy) = x + y$ kapalı denkleminde $\frac{dy}{dx}$ ifadesini çekiniz.

Çözüm: Sol tarafta zincir kuralı ve iç kısımda çarpım kuralı uygulanır:

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') = 1 + y'$$

Parantezi dağıtalım:

$$y \cos(xy) + xy' \cos(xy) = 1 + y'$$

y' terimlerini sol tarafa, diğerlerini sağ tarafa alalım:

$$xy' \cos(xy) - y' = 1 - y \cos(xy)$$

$$y'(x \cos(xy) - 1) = 1 - y \cos(xy)$$

$$y' = \frac{1 - y \cos(xy)}{x \cos(xy) - 1}$$

10. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm: 1. Noktayı bulalım: $y_0 = f(2) = 2^3 - 3(2^2) + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$. Noktamız $P(2, 0)$. 2. Eğim fonksiyonu (Türev): $f'(x) = 3x^2 - 6x$. 3. Teğet eğimi (m_T): $x = 2$ yazılır. $m_T = 3(2^2) - 6(2) = 12 - 12 = 0$. 4. Denklem: Eğim 0 olduğuna göre teğet yataydır ($y = y_0$).

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 0 \text{ (x eksen)}i$$

11. $y = \tan(2x)$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{8}$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm: Teğetin eğimi, o noktadaki türev değeridir.

$$y' = (\tan(2x))' = \sec^2(2x) \cdot 2$$

$x = \pi/8$ yerine yazılır:

$$m = 2 \sec^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 2 \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(\pi/4) = \sqrt{2}.$$

$$m = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

12. $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ eğrisine $x = 3$ noktasında çizilen **normal** doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm: 1. Nokta: $f(3) = \sqrt{3^2 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Noktamız $P(3, 5)$. 2. Türev: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$. 3. Teğet eğimi (m_T): $m_T = f'(3) = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$. 4. Normal eğimi (m_N): Teğet ve normal diktir, $m_T \cdot m_N = -1$.

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{5}{3}$$

5. Denklem: $P(3, 5)$ noktasından geçen ve eğimi $-5/3$ olan doğru.

$$y - 5 = -\frac{5}{3}(x - 3)$$

$$3(y - 5) = -5(x - 3) \Rightarrow 3y - 15 = -5x + 15$$

$$5x + 3y - 30 = 0$$

13. $x^2 + 4y^2 = 8$ elipsine $P(2, -1)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm: Kapalı türev alarak eğimi bulalım:

$$2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

Nokta $(2, -1)$ için teğet eğimi:

$$m_T = -\frac{2}{4(-1)} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Teğet denklemi:

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{x}{2} - 1$$

$$x - 2y - 4 = 0$$

14. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ eğrisinin $P(-3\sqrt{3}, 1)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

Çözüm: Kapalı türev alalım:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$$

$$x^{-1/3} + y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

Noktayı yerine yazalım ($x = -3\sqrt{3}, y = 1$): Not: $3\sqrt{3} = \sqrt{27} = 3^{1.5}$. Küpkökünü almak kolaylaşsın diye üslü bakalım.

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{1}{-3\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}}$$

$(-3\sqrt{3})$ sayısı $-(3^3)^{1/2}$ dir. Küpkökü alındığında işaret $-$, sayı $\sqrt{3}$ çıkar.

$$y' = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

-
15. $xy + y^2 = 2x$ eğrisinin $P(1, 1)$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

Çözüm: Kapalı türev:

$$(1 \cdot y + x \cdot y') + 2y \cdot y' = 2$$

Nokta $(1, 1)$ yerine yazılır (Henüz y' yalnız bırakılmadan yazmak işlem kolaylığı sağlar):

$$(1 + 1 \cdot y') + 2(1)y' = 2$$

$$1 + 3y' = 2 \Rightarrow 3y' = 1 \Rightarrow \mathbf{m_T = \frac{1}{3}}$$

Teğet Denklemi:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow \mathbf{x - 3y + 2 = 0}$$

Normal Eğimi: $m_N = -3$. Normal Denklemi:

$$y - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -3x + 3 \Rightarrow \mathbf{y = -3x + 4}$$

-
16. $f(x) = ax^2 + bx$ parabolü $(1, 2)$ noktasından geçmektedir ve bu noktadaki teğetin eğimi 3'tür. a ve b kaçtır?

Çözüm: 1. Bilgi: Eğri noktadan geçer. $f(1) = 2 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) = 2 \Rightarrow \mathbf{a + b = 2}$.
2. Bilgi: Teğet eğimi türevdir. $f'(x) = 2ax + b$. $f'(1) = 3 \Rightarrow 2a(1) + b = 3 \Rightarrow \mathbf{2a + b = 3}$.
3. Denklem Çözümü: $2a + b = 3$ ve $a + b = 2$. Taraf tarafa çıkarırsak: $(2a + b) - (a + b) = 3 - 2 \Rightarrow \mathbf{a = 1}$. $1 + b = 2 \Rightarrow \mathbf{b = 1}$.

-
17. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını bulunuz.

Çözüm: Türev alıp sıfıra eşitleyelim:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow 6(x - 2)(x - 1) = 0$$

Kritik noktalar: $x = 1$ ve $x = 2$. İşaret tablosu:

- $(-\infty, 1)$ aralığında $f' > 0$ (Artan)
- $(1, 2)$ aralığında $f' < 0$ (Azalan) $\rightarrow x = 1$ 'de **Yerel Maksimum**.
- $(2, \infty)$ aralığında $f' > 0$ (Artan) $\rightarrow x = 2$ 'de **Yerel Minimum**.

Değerleri bulalım: $f(1) = 2 - 9 + 12 - 5 = 0$. Maksimum Nokta: $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$. $f(2) = 16 - 36 + 24 - 5 = -1$. Minimum Nokta: $(\mathbf{2}, -\mathbf{1})$.

18. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: Türev alalım ($x \neq 0$):

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

Sıfıra eşitleyelim:

$$1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ veya } x = -2$$

Tabloyu incelersek:

- $x = -2$ noktasında türev işaret değiştiriyor ($+$ $\rightarrow$ $-$) $\Rightarrow$ **Yerel Maksimum**.
 $f(-2) = -2 + \frac{4}{-2} = -4$. Nokta: $(-\mathbf{2}, -\mathbf{4})$.
 - $x = 2$ noktasında türev işaret değiştiriyor ($-$ $\rightarrow$ $+$) $\Rightarrow$ **Yerel Minimum**.
 $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$. Nokta: $(\mathbf{2}, \mathbf{4})$.
-