

KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ I

Uygulama

1. Uygulama

1) Aşağıdaki sayıların sanal ve gerçel kısımlarını bul.

a) $z = \frac{1+5i}{1-2i} = \frac{(1+5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{9}{5} + \frac{7}{5}i$, $\text{Re}(z) = -\frac{9}{5}$, $\text{Im}(z) = \frac{7}{5}$

b) $z^3 = (x+iy)^3 = (x^2+2xyi-y^2)(x+iy) = x^3+2x^2yi-xy^2+x^2yi-2xy^2-y^3i$
 $= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$
 $= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

2) Aşağıdaki sayıları önce $a+ib$ şeklinde yazınız ve sonra mutlak değerleri ve eşleniklerini bul.

a) $z = (-2, 1) \Rightarrow z = -2+i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\bar{z} = -2-i$

b) $z = (4+i)^2 \Rightarrow z = 16+8i+i^2 = 15+8i \Rightarrow |z| = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$, $\bar{z} = 15-8i$

3) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -1+5i$ old. gör. $\overline{z_1+z_2}$ ve $\bar{z}_1 + 3\bar{z}_2$ sayılarını bul.

$z_1+z_2 = (2+3i)+(-1+5i) = 1+8i \Rightarrow \overline{z_1+z_2} = 1-8i$

$\bar{z}_1 = 2-3i$, $3\bar{z}_2 = 3(-1-5i) = -3-15i \Rightarrow \bar{z}_1 + 3\bar{z}_2 = (2-3i)+(-3-15i) = -1-18i$

4) Aşağıdaki sayıları kutupsal gösterimle yazınız.

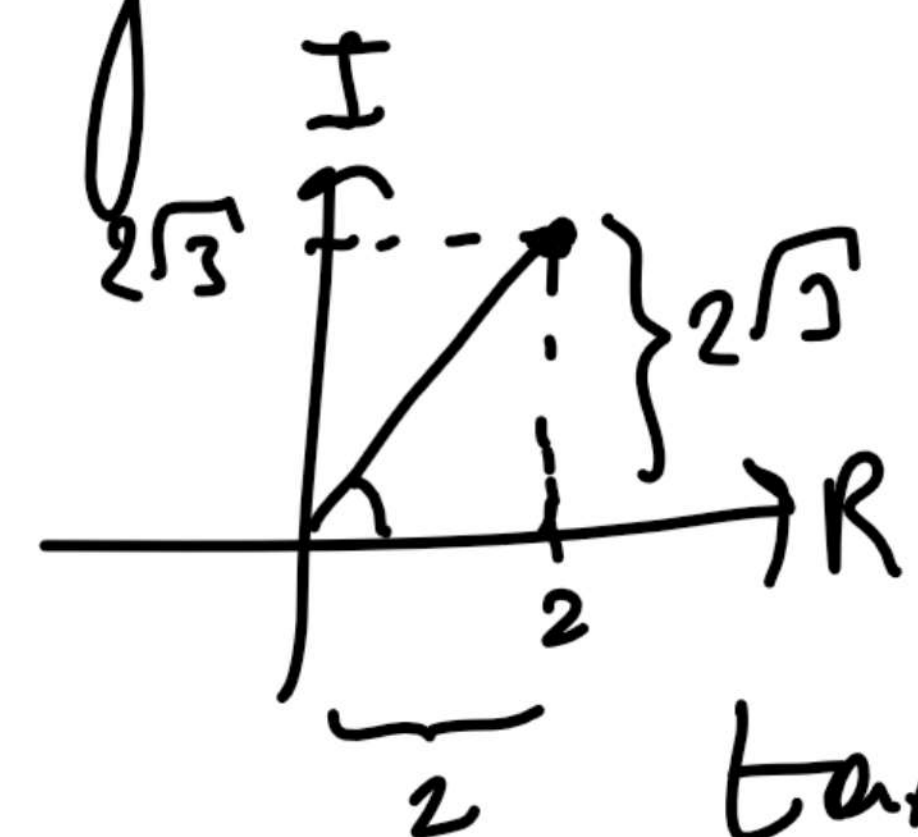
a) $2+2\sqrt{3}i$

$r = |2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = 4$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ old.

$2+2\sqrt{3}i = 4 \cos(\frac{\pi}{3}) + i4 \sin(\frac{\pi}{3})$

b) $-3i$, $r = |-3i| = \sqrt{9} = 3$

$-3i = 3 \cos(\frac{3\pi}{2}) + i3 \sin(\frac{3\pi}{2})$



$\tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3}$
 $\theta = \arctan \sqrt{3}$
 $= \frac{\pi}{3}$



5) $3x + 2yi - ix + 5y = 7 + 5i$ eşitliğini sağlayan x, y reel sayıları bulun.

$$\begin{array}{r} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \\ \hline 11y = 22 \\ y = 2 \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

6) $|z^2 + 1|$ in $|z| \leq 1$ birim diski üzerindeki maksimum değeri 2 olduğunu göster.

Üçgen eşitsizliğinden

$$|z^2 + 1| \leq |z|^2 + 1 \leq 1 + 1 = 2$$

7) $\left| \frac{z-3}{z+1} \right| < 2$ eşitsizliğinin gösterdiği noktalar kümesini belirtiniz.

$$|z-3| < 2|z+1| \Rightarrow |(x+iy)-3| < 2|x+iy+1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} < 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

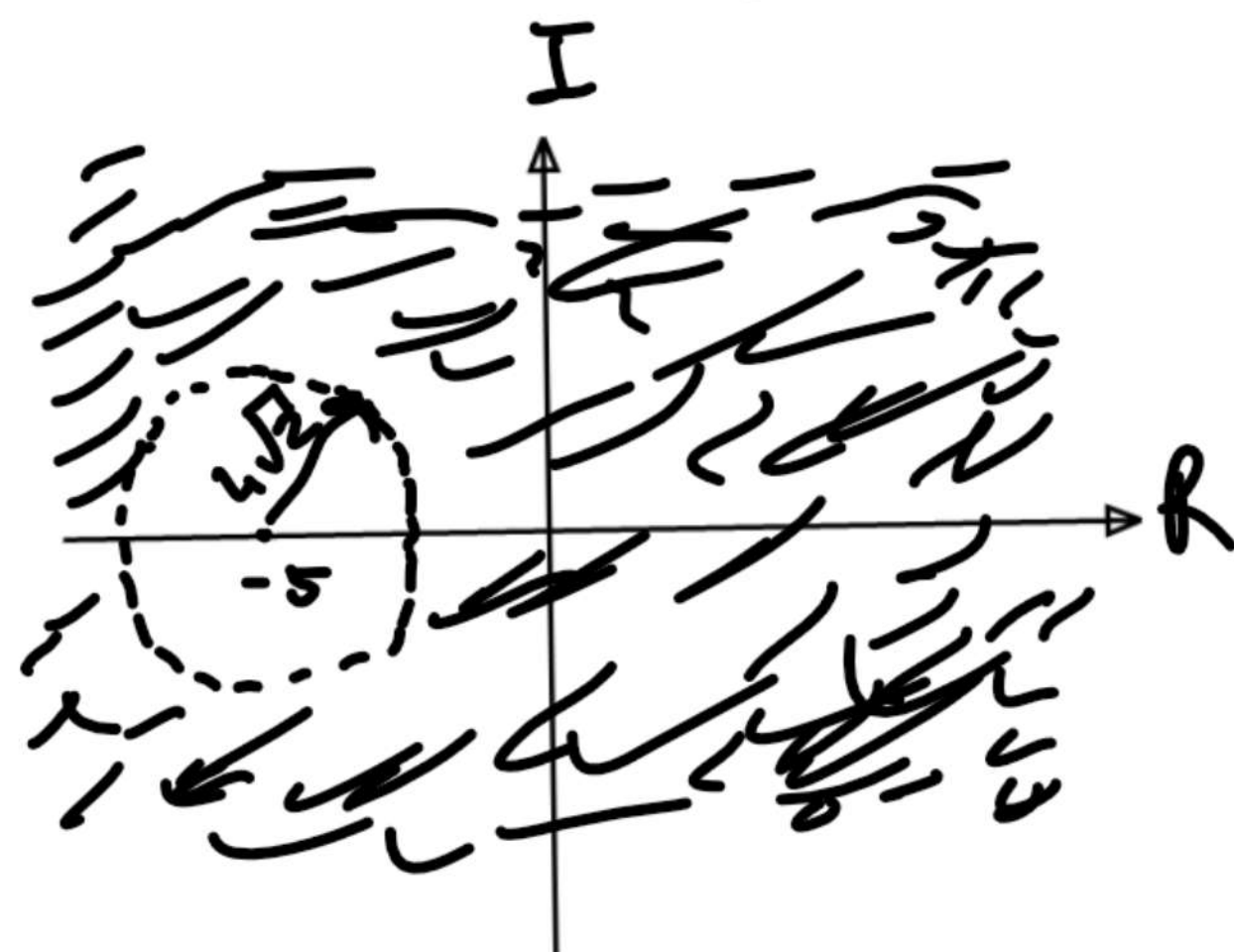
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 < 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 + y^2 + 10x - 7 + 25 - 25$$

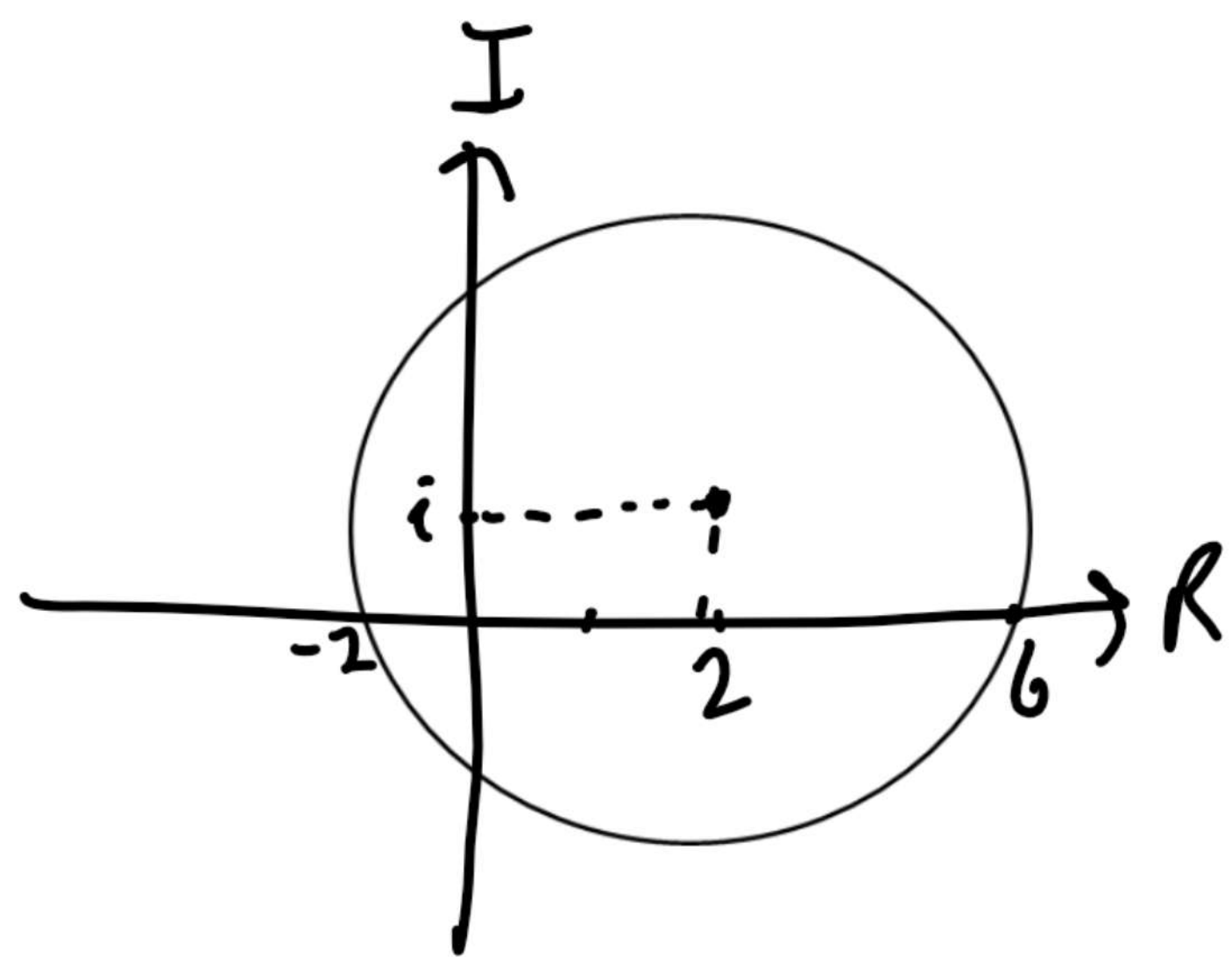
$$0 < (x+5)^2 + y^2 - 32$$

$$32 < (x+5)^2 + y^2 \Rightarrow \sqrt{32} < \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow |z+5| > 4\sqrt{2}$$



8) $2+i$ merkezli ve 4 yarıçaplı çemberin denklemini bul.



$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

z_0 merkezli, r yarıçaplı çember

$$|z - z_0| = r$$

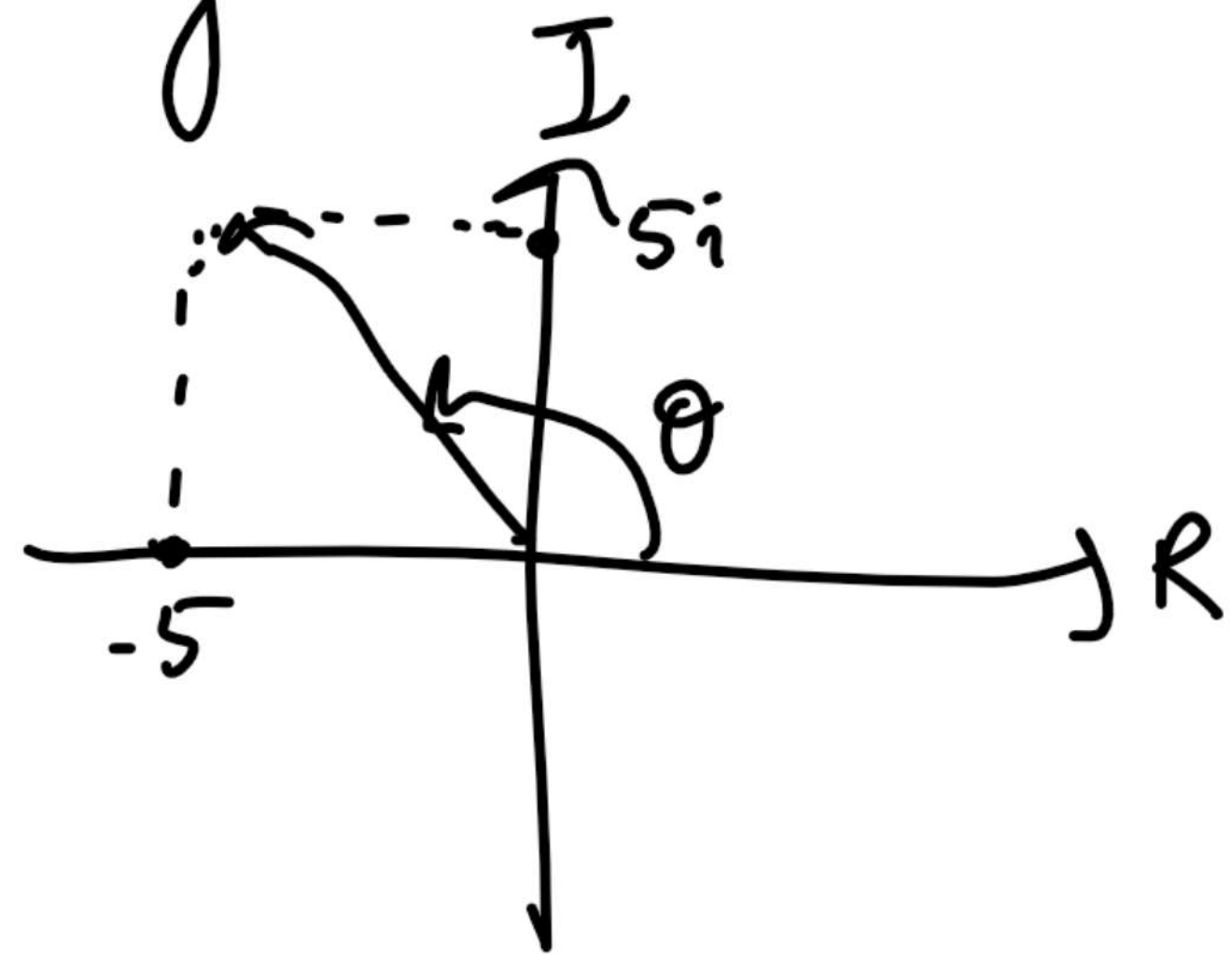
$$|z - (2+i)| = 4$$

$$|x+iy - 2-i| = 4$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 4$$

9) Aşağıdaki sayıları kutupsal formda yazınız.

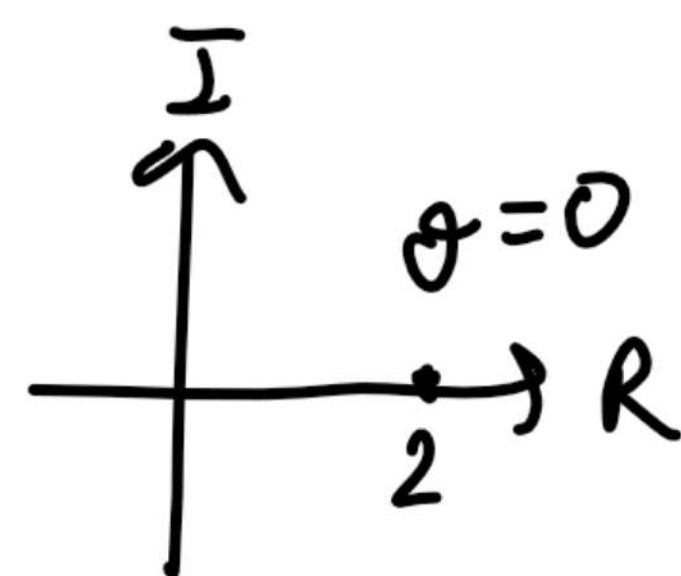
a) $-5+5i \Rightarrow r = |-5+5i| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$



$$\frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = \frac{135^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$$

$$-5+5i = 5\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i5\sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

b) $2 \Rightarrow r = |2| = 2$



$$2 = 2\cos 0 + i\sin 0 \\ = 2\cos 0$$

10) Aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız.

a) $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i\sin \theta$$

$$+ e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos \theta - i\sin \theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos \theta \Rightarrow \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta$$

b) $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i\sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos \theta - i\sin \theta$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin \theta \Rightarrow \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta$$