



**T.C.
ESKİŞEHİR TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ**

NAPOLEON TEOREMİ

**HAZIRLAYAN
NURETTİN TOLGA ÖNBİLEK**

**DANIŞMAN
Araş. Gör. Dr. GÖKÇE ÇAKMAK**

**MAT437 MATEMATİK UYGULAMALARI
2020–2021 GÜZ DÖNEMİ**

İçindekiler

1	Giriş	3
2	Kanıtlar	5
2.1	Napoleon Teoremi'nin Trigonometrik Kanıtı	5
2.2	Napoleon Teoremi'nin Simetrik Kanıtı	7
2.3	Napoleon Teoremi'nin Analitik Kanıtı	10
3	Napoleon Üçgenlerinin Özellikleri	11
3.1	Düzlemi Kaplama	11
3.2	Alan Özelliği	12
3.4	İç Napoleon Üçgeninin Konumu	13
3.10	Dış Napoleon Üçgeninin Konumu	17
4	Sonuç	21
	Kaynaklar	22

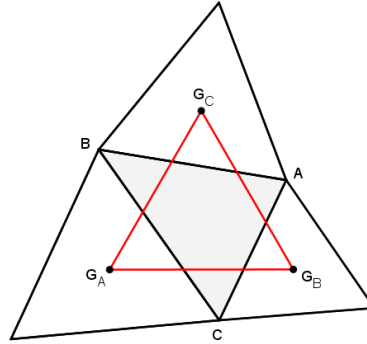
1 Giriş

Napoleon Bonapart, 1769-1821 yılları arasında yaşamış Fransız asker ve politikacıdır. Gerek Fransız Devrim Savaşları gerekse Napoleon Savaşları sırasında Fransa'ya önderlik ettiği gibi tüm Avrupa'yı da etkilemiş bir komutandır. Fakat Napoleon'un az bilinen bir özelliği ise matematik ve geometriye olan ilgisi ve yatkınlığıdır. Napoleon boş kalan zamanlarında dönemin matematikçileriyle bir araya gelip sohbet ederdi. Napoleon'a atfedilen, onun ortaya attığı ya da kanıtladığı düşünülen bir teoremi de vardır. Napoleon Teoremi diye geçen bu teorem her ne kadar Napoleon'un matematiğe olan ilgisinden ona atfedilse de bu teorem İngiliz matematikçi William Rutherford'un 1825 yılında The Ladies' Diary'de kanıtını yayınlamasıyla ortaya çıktı. Fakat Napoleon bundan dört yıl önce 1821'de öldü. Ne Rutherford, ne de teoremi kanıtlayan diğer matematikçiler Napoleon'dan hiç söz etmedi.

Bu durum 1991'de Aurelio Faifofer metninin 17. baskısının yayınlanmasıyla değişti. O metinde "Napoleon'dan, Lagrange'a kanıt için teorem önerisi" olarak bu teorem gösterildi. Bununla birlikte bir çok yazarın bu teoremi Napoleon'a atfettiğini iddia etmeleriyle garip bir fenomen haline geldi. Napoleon'un bu teoremi ortaya atacak yeterli geometri bilgisinin olduğu şüphe konusu, fakat bu teorem artık yaygın bir şekilde "Napoleon Teoremi" olarak kabul görmektedir.[2]

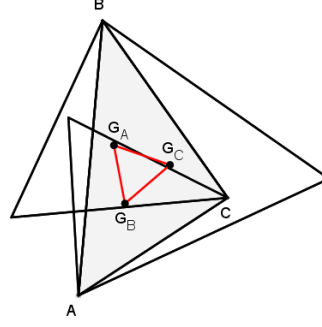
Bu çalışmada Napoleon Teoremi ifade edilecek, farklı kanıtları ve özellikleriyle bu ilgi çekici teorem tanıtılacaktır.

Tanım 1.1. (Dış Napoleon Üçgeni) Herhangi bir ABC üçgenin kenarlarının dışına doğru yerleştirilen eşkenar üçgenlerin G_A , G_B ve G_C ağırlık merkezlerini birleştiren üçgene Dış Napoleon Üçgeni denir.(bkz. Şekil 1)



Şekil 1: Dış Napoleon Üçgeni. Burada A köşesine ait kenardan dış eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G_A , B köşesine ait dış kenardan çizilen eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G_B ve C kenarına ait dış kenardan çizilen eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G_C sembolleri ile ifade edilmiştir.

Tanım 1.2. (İç Napoleon Üçgeni) Herhangi bir ABC üçgenin kenarlarının içine doğru yerleştirilen eşkenar üçgenlerin ağırlık merkezlerini birleştiren üçgene İç Napoleon Üçgeni denir.(bkz. Şekil 2)

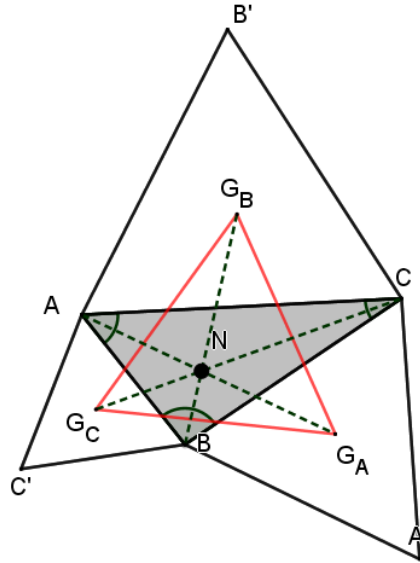


Şekil 2: İç Napoleon Üçgeni. Burada A köşesine ait iç kenardan çizilen eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G_A , B köşesine ait iç kenardan çizilen eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G_B ve C kenarına ait iç kenardan çizilen eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G_C sembolleri ile ifade edilmiştir.

Şimdi bu tanımları göz önünde bulundurarak teoremi ifade edelim:

Teorem 1.3. (*Napoleon Teoremi*)

Herhangi bir ABC üçgeninin kenarlarının üzerine eşkenar üçgenler yerleştirilirse (bkz. Şekil 3) ve bu eşkenar üçgenlerin ağırlık merkezleri sırasıyla G_A, G_B, G_C ise $G_A G_B G_C$ noktalarını birleştiren üçgen eşkenar üçgendir.

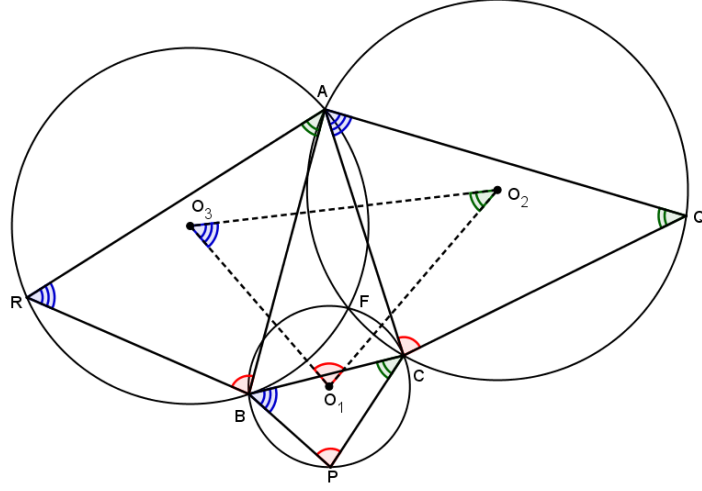


Şekil 3: Napoleon Teoremi

AG_A, BG_B ve CG_C doğruları ise aynı noktada kesişir ve kesiştikleri noktaya Napoleon noktası denir ve N ile gösterilir.

Kanıtlara geçmeden önce Napoleon Üçgeninin daha genel hali olan bir teorem verelim.

Teorem 1.4. Herhangi bir ABC üçgeninin kenarları üzerinden dışa doğru CBP , QAC ve ARB benzer üçgenleri oluşturulursa, bu üçgenlerin çevrel çemberleri tek noktada kesişir (bkz. Şekil 4).



Şekil 4

Kanıt. Herhangi bir ABC üçgeni çizilsin ve bu üçgenin her bir kenarından CBP , QAC ve ARB üçgenleri çizilsin öyle ki $CBP \cong QAC \cong ARB$ olsun(bkz. Şekil 4) P , Q , R köşelerine ait açılar toplamı $\widehat{P} + \widehat{Q} + \widehat{R} = 180^\circ$ olsun. CBP ve ACQ üçgenlerinin çevrel çemberleri C noktasında kesişir. Diğer kesiştikleri noktaya ise F diyelim. F , A , B ve C noktalarını birleştirirsek

$$\widehat{BFC} = 180^\circ - P, \quad \widehat{CFA} = 180^\circ - Q$$

ve

$$\begin{aligned} \widehat{AFB} &= 360^\circ - (\widehat{BFC} + \widehat{CFA}) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - P + 180^\circ - Q) \\ &= P + Q \\ &= 180^\circ - R \end{aligned}$$

elde edilir. O halde F noktası, BAR üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. Dolayısıyla üç benzer üçgenin çevrel çemberleri ortak bir F noktasında kesişir. $\square$

Bu teorem aslında Napoleon teoreminin birbirlerine benzer üçgenlerle oluşturulması sonucu çevrel çemberlerinin ortak bir noktada kesişmesidir.

2 Kanıtlar

2.1 Napoleon Teoremi'nin Trigonometrik Kanıtı

Kanıt. ABC üçgeni verilsin ve kenarlarına eşkenar üçgenler yerleştirilsin(bkz:Şekil5). ACB' , CBA' ve BAC' eşkenar üçgenler olduğundan G_A , G_B ve G_C ağırlık merkezleri için

değeri, (1)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
3y_3^2 &= b^2 + c^2 - 2bc - 2bc[\cos(\alpha)\cos(60^\circ) - \sin(\alpha)\sin(60^\circ)] \\
&= b^2 + c^2 - 2bc[\cos(\alpha)\frac{1}{2} - \sin(\alpha)\frac{\sqrt{3}}{2}] \\
&= b^2 + c^2 - bccos(\alpha) + \sqrt{3}bcsin(\alpha)
\end{aligned} \tag{2}$$

bulunur. ABC üçgenine kosinüs teoremini uygularsak

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} = -bc \cos(\alpha) \tag{3}$$

ve ABC üçgeni için sinüs alan formülünden

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) \tag{4}$$

elde edilir. (3) ve (4)'ü (2) deki eşitlikte yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
3y_3^2 &= b^2 + c^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} + 2\sqrt{3}(\Delta ABC) \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}(\Delta ABC)
\end{aligned}$$

bulunur. a , b ve c simetrik olduğundan,

$$3y_3^2 = 3y_2^2 = 3y_1^2$$

yazılabilir. Sadeleştirirsek

$$y_3 = y_2 = y_1$$

bulunur. Yani;

$$|G_C G_A| = |G_A G_B| = |G_B G_C|$$

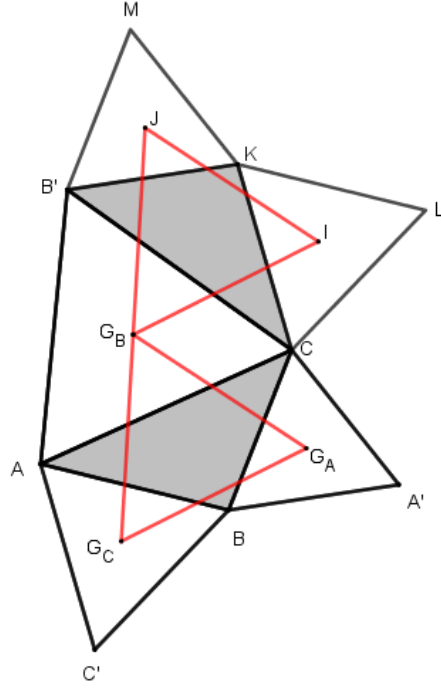
elde edilir. O halde $G_A G_B G_C$ üçgeni eşkenar üçgendir.

□

2.2 Napoleon Teoremi'nin Simetrik Kanıtı

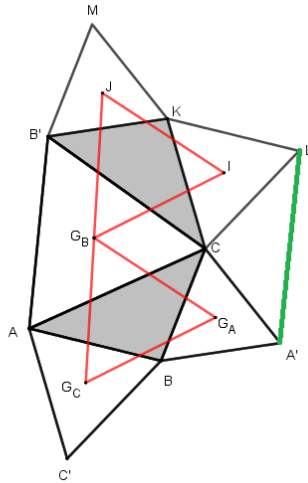
Kanıt. ABC üçgeni verilsin. ABC üçgeninin her bir kenarının üzerine eşkenar üçgenler yerleştirilsin ve G_A , G_B ve G_C ağırlık merkezlerini birleştiren üçgen oluşturulsun.

G_B noktasını bir dönüş merkezi olarak sabitleyelim ve tüm şekli G_B noktası etrafında saat yönünün tersine 120° döndürelim ve döndürülen kopyayı şeklin üzerine yerleştirelim. Döndürme sonrası oluşan üçgenlerin isimlendirmeleri şekildeki gibi olsun(bkz. Şekil 6) Döndürme sonrası ACB' kendi üzerine gelir. Çünkü ACB' eşkenar üçgen olduğundan ve şekil ACB' 'nin G_B ağırlık merkezi etrafında döndürüldüğünden $CG_B B'$ üçgenini düşünürsek $\widehat{CG_B B'}$ açısı 120° 'dir. Dolayısıyla şekil 120° döndürüldüğünde C noktası B' noktasının üzerine gelir. Benzer şekilde B' noktası A noktasının üzerine, A noktası da C noktasının



Şekil 6: Napoleon teoreminin simetrik kanıtının bir modeli

üzerine gelir, yani üçgen tekrar kendi üzerine yerleşir. Döndürme sonrasında $\widehat{G_C G_B G_A}$ iç açısı $\widehat{I G_B J}$ iç açısına denk gelir yani $\widehat{G_C G_B G_A} = \widehat{I G_B J}$ olur. Şimdi L ile A' noktasını birleştirelim ve orada da oluşan $CA'L$ üçgeni ile birlikte(bkz. Şekil 7) C noktasının etrafındaki altı üçgeni düşünelim.



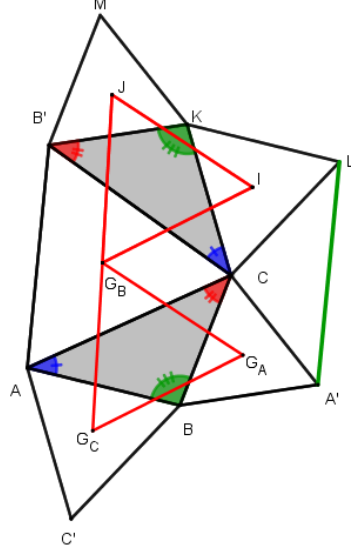
Şekil 7

ACB' , KCL ve BCA' eşkenar üçgen olduğundan C noktasının etrafındaki bu üç açının

toplamı 180° 'dir. C noktasının etrafındaki bütün açların toplamı 360° olduğundan

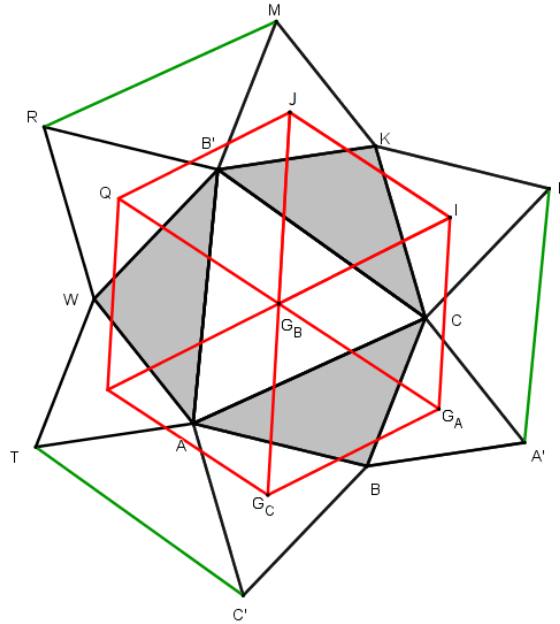
$$\widehat{B'CK} + \widehat{LCA'} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

olur. ABC ve CKB' eş üçgenler olduğundan ve $\widehat{B'CK} = \widehat{CAB}$ olduğundan (bkz. Şekil 8)



Şekil 8

$\widehat{LCA'} = \widehat{ABC}$ olur. Yani LCA' üçgeni ile ABC üçgeni eş üçgenlerdir. O halde $|IG_A| = |G_CG_A|$ olup $G_CG_AG_B$ ve IG_AG_B eş üçgen olur. Dolayısıyla $G_C\widehat{G_BG_A} = I\widehat{G_BG_A}$ 'dır. Elde edilen şekil tekrar saat yönünün tersinde 120° döndürülürse Şekil 9 elde edilir.



Şekil 9

Benzer şekilde G_B noktasının etrafındaki bütün açılar $\widehat{G_C G_B G_A}$ iç açısına eşit olduğu görülebilir. Dolayısıyla G_B merkezli bir düzgün altıgen elde edilir. G_B noktasının etrafındaki açılar toplamı 360° ve G_B düzgün altıgenin merkezi olduğundan

$$\begin{aligned} 6.(\widehat{G_C G_B G_A}) &= 360^\circ \\ \widehat{G_C G_B G_A} &= 60^\circ \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla oluşan $G_C G_A G_B$ üçgeni eşkenardır. □

2.3 Napoleon Teoremi'nin Analitik Kanıtı

Kanıt. Koordinat düzleminde herhangi bir üçgen çizilsin. Üçgenin köşe noktaları saat yönünün tersine doğru $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,1,2}$ şeklinde adlandırılın ve üçgenin her bir kenarına eşkenar üçgen yerleştirilsin. (x_i, y_i) ile (x_{i+1}, y_{i+1}) noktalarını birleştiren kenara ait eşkenar üçgenin ağırlık merkezinden, bu kenara bir dik indirilsin. Açık bir şekilde indirilen dik doğru parçası kenarı iki eşit parçaya böler. Bu kenara ait eşkenar üçgenin ağırlık merkezi (x_{c_i}, y_{c_i}) şeklinde adlandırılın. (x_{c_i}, y_{c_i}) ile $(x_{c_{i+1}}, y_{c_{i+1}})$ arasındaki uzaklık her i için eşit olduğu gösterilirse, çizilen herhangi bir üçgenin kenarlarından çizilen üçgenlerin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu üçgenin eşkenar olduğu ortaya çıkar. İlk olarak yapılması gereken (x_{c_i}, y_{c_i}) koordinatlarını (x_i, y_i) cinsinden bulmaktır.

(x_i, y_i) ile (x_{i+1}, y_{i+1}) arasındaki uzaklık $\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ 'dir. (x_i, y_i) ile (x_{i+1}, y_{i+1}) 'in orta noktası $(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2})$ dir. Bu noktaların belirlenmesinin sebebi $G_i(x_{c_i}, y_{c_i})$, $(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2})$ ve (x_i, y_i) noktalarının oluşturduğu dik üçgen yardımıyla (x_{c_i}, y_{c_i}) noktasının koordinatlarını bulmaktır. O halde (x_{c_i}, y_{c_i}) ile $(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2})$ arasındaki uzaklık bize $\frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{2\sqrt{3}}$ uzunluğunu verecektir. Yani $G_i = (x_{c_i}, y_{c_i})$ ve $O_1 = (\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2})$ olmak üzere;

$$|O_1 G_i| = \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{2\sqrt{3}} \quad (5)$$

ve aynı zamanda,

$$|O_1 G_C| = \sqrt{\left(x_{c_i} - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2 + \left(y_{c_i} - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)^2} \quad (6)$$

bulunur. (5) ve (6)'dan

$$\frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(x_{c_i} - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2 + \left(y_{c_i} - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)^2}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse (xc_i, yc_i) 'nin koordinatları

$$(xc_i, yc_i) = \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{y_i - y_{i+1}}{2\sqrt{3}}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + \frac{x_i - x_{i+1}}{2\sqrt{3}} \right)$$

buludur. O halde $G_0(xc_0, yc_0)$ ile $G_1(xc_1, yc_1)$ arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} |G_0G_1|^2 &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 - y_2}{2\sqrt{3}} - \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{y_0 - y_1}{2\sqrt{3}} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2\sqrt{3}} - \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2\sqrt{3}} \right)^2 \end{aligned}$$

$G_1(xc_1, yc_1)$ ile $G_2(xc_2, yc_2)$ arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} |G_1G_2|^2 &= \left(\frac{x_2 + x_0}{2} + \frac{y_2 - y_0}{2\sqrt{3}} - \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 - y_2}{2\sqrt{3}} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{y_2 + y_0}{2} + \frac{x_2 - x_0}{2\sqrt{3}} - \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2\sqrt{3}} \right)^2 \end{aligned}$$

$G_2(xc_2, yc_2)$ ile $G_0(xc_0, yc_0)$ arasındaki uzaklık

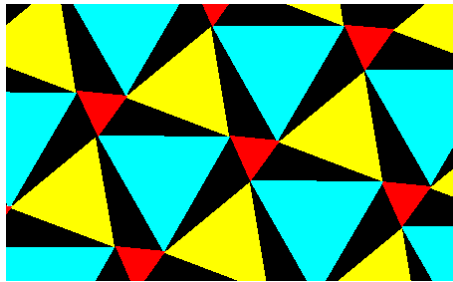
$$\begin{aligned} |G_2G_0|^2 &= \left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{y_0 - y_1}{2\sqrt{3}} - \frac{x_2 + x_0}{2} + \frac{y_2 - y_0}{2\sqrt{3}} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2\sqrt{3}} - \frac{y_2 + y_0}{2} + \frac{x_2 - x_0}{2\sqrt{3}} \right)^2 \end{aligned}$$

olacaktır. Elde edilen uzaklıklar birbirine eşittir, çünkü bir uzaklık $(a - b)^2$ iken, diğer uzaklık $(b - a)^2$ ve $(a - b)^2 = (b - a)^2$ olur. Bütün ağırlık merkezlerinin birbirine olan uzaklıkları eşit olduğundan $G_0G_1G_2$ bir eşkenar üçgendir. $\square$

3 Napoleon Üçgenlerinin Özellikleri

3.1 Düzlemi Kaplama

Dış Napoleon üçgenini oluşturan 4 üçgen, simetrik kanıtta gösterildiği gibi ötelenip döndürülürse tüm düzlemi kaplayan bir mozaik ortaya çıkar.



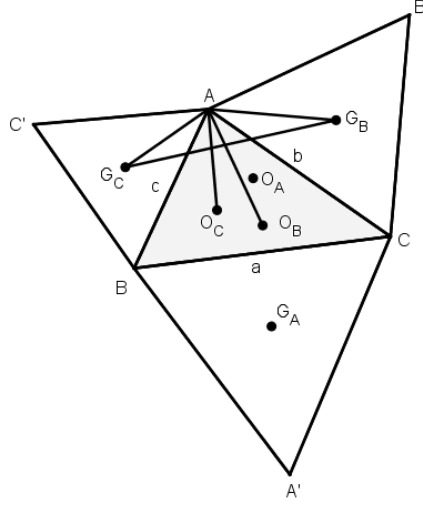
Şekil 10: Napoleon Teoremi yardımıyla kaplanan düzlem

Şekil 10'da siyah üçgenler herhangi bir başlangıç üçgenidir. Mavi, sarı ve kırmızı üçgenler ise siyah üçgenin dışına yerleştirilen eşkenar üçgenlerdir.

3.2 Alan Özelliği

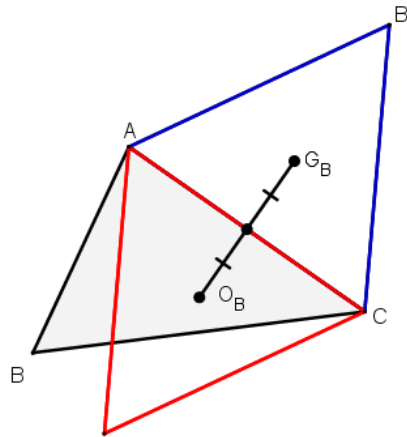
Teorem 3.3. *Herhangi bir ABC üçgeninin iç ve dış Napoleon üçgenlerinin alanlarının pozitif farkı ABC üçgeninin alanını verir.*

Kanıt. Herhangi bir ABC üçgeni alalım. ABC 'nin alanını Δ ile gösterelim. $G_A G_B G_C$ dış Napoleon, $O_A O_B O_C$ ise iç Napoleon üçgendir. (bkz. Şekil 11)



Şekil 11: Alanlarının pozitif farkının kanıtı için bir şekil

O_A, O_B, O_C noktaları ile G_A, G_B, G_C noktaları sırasıyla BC, CA, AB kenarlarına göre simetriktir. Çünkü iç Napoleon üçgeni ile dış Napoleon üçgenine ait eşkenar üçgenler aynı kenar üzerindedir dolayısıyla bu üçgenlerin ağırlık merkezi o kenara göre simetriktir. (bkz. Şekil 12)



Şekil 12: Mavi üçgen dış Napoleon üçgenine ait eşkenar üçgen, kırmızı üçgen ise iç Napoleon üçgenine ait eşkenar üçgendir.

İç ve dış Napoleon üçgenler eşkenar üçgen olduğundan

$$\widehat{G_CAG_B} = \widehat{BAC} + 60^\circ$$

elde edilir. $\widehat{O_CAO_B}$ açısının ölçüsü ise $\widehat{BAC} - 60^\circ$ 'dir. Trigonometrik kanıttaki (1) eşitliği hatırlanırsa

$$3(G_CG_B)^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\widehat{BAC} + 60^\circ)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $O_AO_BO_C$ iç Napoleon üçgeni için

$$3(O_CO_B)^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\widehat{BAC} - 60^\circ)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} 3(G_CG_B)^2 - 3(O_CO_B)^2 &= 2bc[\cos(\widehat{BAC} - 60^\circ) - \cos(\widehat{BAC} + 60^\circ)] \\ (G_CG_B)^2 - (O_CO_B)^2 &= \frac{2bc[\cos(\widehat{BAC} - 60^\circ) - \cos(\widehat{BAC} + 60^\circ)]}{3} \\ &= \frac{4}{3}bc \sin \widehat{BAC} \sin 60^\circ \\ &= 2bc \frac{\sin \widehat{BAC}}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (7)$$

bulunur. Yine trigonometrik kanıttaki (4) eşitliği ($\Delta = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{BAC}$) kullanılırsa ve (5) denkleminde yerine yazılırsa

$$(G_CG_B)^2 - (O_CO_B)^2 = \frac{4\Delta}{\sqrt{3}}$$

ve

$$\frac{\sqrt{3}}{4}[(G_CG_B)^2 - (O_CO_B)^2] = \Delta$$

elde edilir. $G_AG_BG_C$ ve $O_AO_BO_C$ eşkenar üçgenler olduklarından bu ifade iki eşkenar üçgenin alanlarının farkı olduğunu gösterir.

□

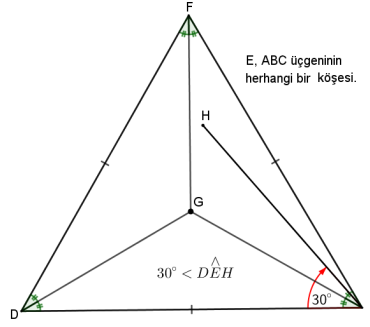
3.4 İç Napoleon Üçgeninin Konumu

Durum 1 ABC üçgeninin bütün içi açıları 30° veya 30° 'den daha büyük ise G_A , G_B , G_C noktaları ABC üçgeninin sınırında veya içinde kalır.

Kanıt. $G_AG_BG_C$ üçgeni, ABC üçgeninin kenarlarına yerleştirilen eşkenar üçgenlerin ağırlık merkezlerinin birleşimiyle oluşan bir eşkenar üçgen olacağı için, G_A , G_B ve G_C noktaları üç eşkenar üçgenin köşelerinden 30° lik doğrular ile çizilen ağırlık merkezleri ile oluşur(bkz. Şekil 13).

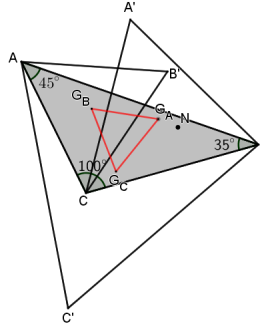
Dolayısıyla ABC üçgeninin iç açılarının hepsi 30° veya 30° 'den büyük olduğu sürece (İki iç açısı 30° olursa diğeri 120° olur.) G_A , G_B ve G_C noktaları ABC üçgeninin sınırında veya içinde kalır.

□



Şekil 13

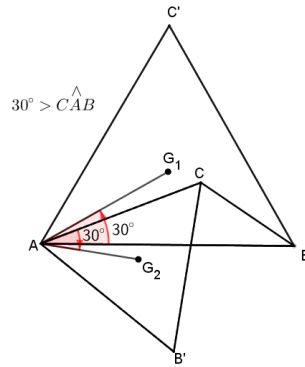
Örnek 3.5. Alınan ABC üçgeninin iç açıları sırasıyla 45° , 35° ve 100° olursa, oluşan $G_A G_B G_C$ üçgeni Şekil 14'deki gibi ABC üçgeninin içinde kalır.



Şekil 14: G_A , G_B ve G_C noktalarının ABC üçgeninin içinde kaldığına dair bir örnek.

Durum 2 ABC üçgeninin bir iç açısı 30° 'den küçük, diğer iki iç açısı 30° veya 30° 'den büyük ise G_A , G_B ve G_C noktalarından ikisi dışarıda kalır.

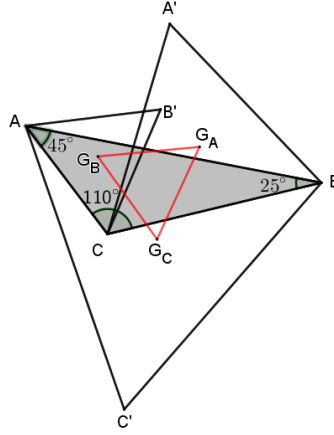
Kanıt. ABC üçgeninin bir iç açısı 30° 'den küçük olsun. O halde o köşeden eşkenar üçgenlerin ağırlık merkezlerine çizilen doğrular 30° olacağı için ve bir köşe iki kenara bağlı olduğundan (bkz. Şekil 15 G_A , G_B ve G_C noktalarının ikisi ABC üçgeninin dışında, diğer nokta ise ABC üçgeninin sınırında veya içinde kalır.



Şekil 15

□

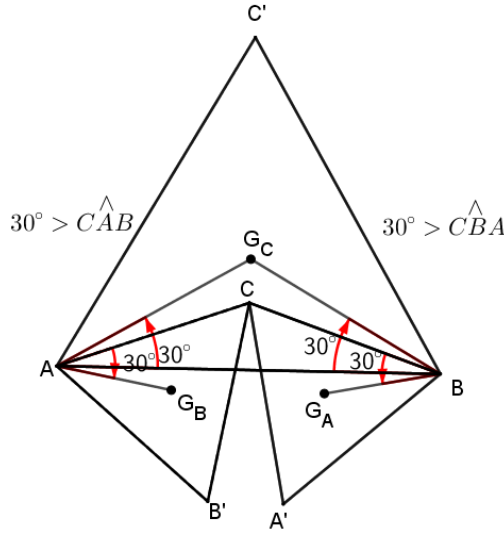
Örnek 3.6. Alınan ABC üçgeninin iç açıları sırasıyla 45° , 25° ve 110° olursa, oluşan $G_A G_B G_C$ üçgenin iki köşesi Şekil 16'deki gibi ABC üçgeninin dışında kalır.



Şekil 16: G_A , G_B ve G_C noktaların ikisinin ABC üçgeninin dışında kaldığı duruma dair bir örnek.

Durum 3 ABC üçgeninin iki iç açısı 30° 'den küçük ise G_A , G_B ve G_C noktalarının hepsi ABC üçgeninin dışında kalır.

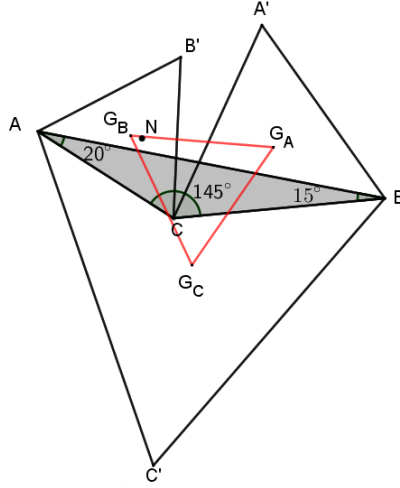
Kanıt. ABC üçgeninin iki iç açısı 30° den küçük olsun. O halde o köşelerden ağırlık merkezlerine çizilen doğru parçaları 30° olacağı için ve bu iki kçşe bütün kenarlara bağlı olduğundan (bkz. Şekil 17) G_A , G_B ve G_C noktaları ABC üçgeninin dışında kalır



Şekil 17

□

Örnek 3.7. Alınan ABC üçgeninin iç açıları sırasıyla 20° , 15° ve 145° olursa, oluşan $G_A G_B G_C$ üçgeninin her bir köşesi Şekil 18'deki gibi ABC üçgeninin dışında kalır.



Şekil 18: G_A , G_B ve G_C noktaların hepsinin ABC üçgeninin içinde kaldığı duruma dair bir örnek.

Sonuç 3.8. G_A , G_B ve G_C noktalarının ikisinin ABC üçgeninin sınırında veya içinde, diğer noktanın ABC üçgeninin dışında olma durumu yoktur.

Kanıt. Varsayalım ki bir ABC üçgeni için G_C noktası ABC üçgeninin dışında, G_A ve G_B noktaları ise ABC üçgeninin sınırında veya içinde olsun. G_C noktası ABC üçgeninin dışında ise Durum 1 ve Durum 2'den dolayı $\widehat{CAB}$ açısı veya $\widehat{ABC}$ açısı 30° 'den küçüktür. $\widehat{CAB}$, 30° 'den küçük olsun. O halde G_B noktası da ABC üçgeninin dışında kalır. Bu bir çelişkidir. $\widehat{ABC}$, 30° 'den küçük olsun. O halde G_A noktası da ABC üçgeninin dışında kalır. Bu bir çelişkidir. $\widehat{CAB}$ ve $\widehat{ABC}$ açıları 30° 'den küçük olsun. O halde G_B ve G_A noktaları ABC üçgeninin dışında kalır. Bu bir çelişkidir.

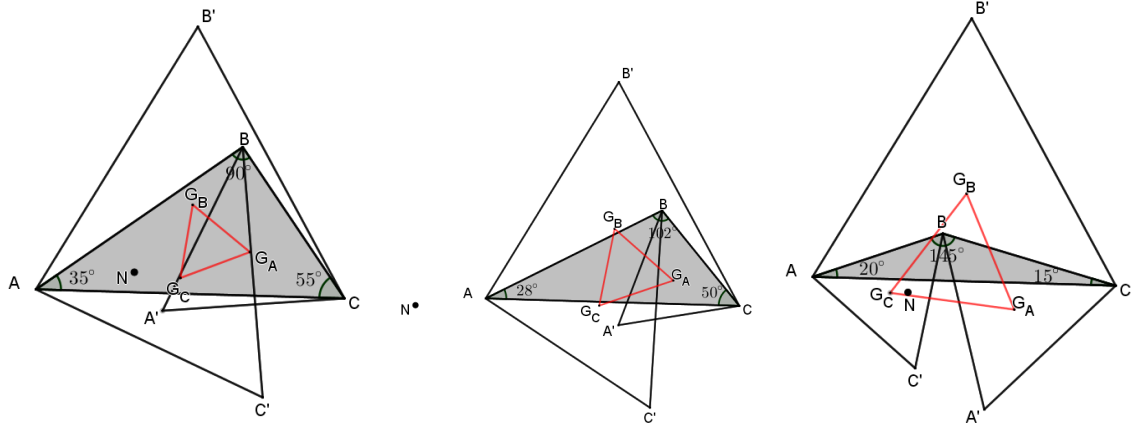
O halde varsayım yanlıştır dolayısıyla G_A , G_B ve G_C noktalarının ikisinin ABC üçgeninin sınırında veya içinde, diğer noktanın ABC üçgeninin dışında olma durumu yoktur. $\square$

N Noktasının Konumu

ABC üçgeninin en az bir iç açısı 30° 'den az ise N noktası ABC üçgeninin dışında kalır. Dolayısıyla ABC üçgeninin tüm iç açıları 30° 'den büyük ise N noktası ABC üçgeninin içinde kalır.

Kanıt. Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'ten dolayı eğer, ABC üçgeninin en az bir iç açısı 30° 'den küçük ise G_A , G_B ve G_C noktalarından en az ikisi ABC üçgeninin dışında kalacağından ve N noktası AG_A , BG_B , CG_C doğrularının kesişiminden oluşacağından, bu doğrulardan en az ikisi ABC üçgeninin tamamen dışında kalır ve dolayısıyla doğruların kesişmesi ABC üçgeninin dışında gerçekleşir. Yani N noktası da ABC üçgeninin dışında olur. Benzer düşünceyle ABC üçgeninin bütün iç açıları 30° 'den büyük ise N noktası ABC üçgeninin dışında kalır.

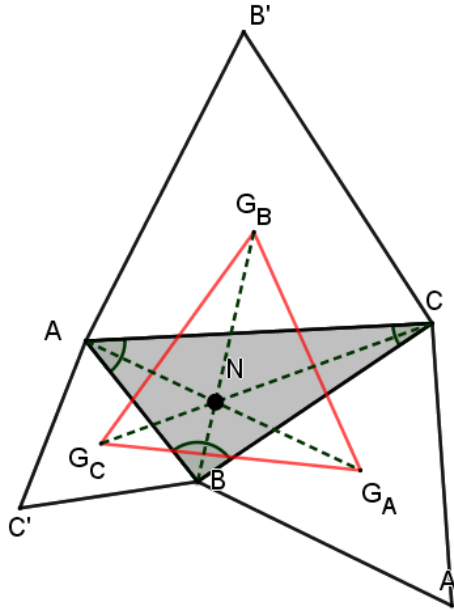
Örnek 3.9. N noktasının konumuyla ilgili 3 örnek.



□

3.10 Dış Napoleon Üçgeninin Konumu

Dış Napoleon üçgeni için tek bir durum söz konusudur. O da G_A , G_B ve G_C noktalarının ABC üçgeninin dışında kaldığı aşikar durumdur (bkz. Şekil 19)

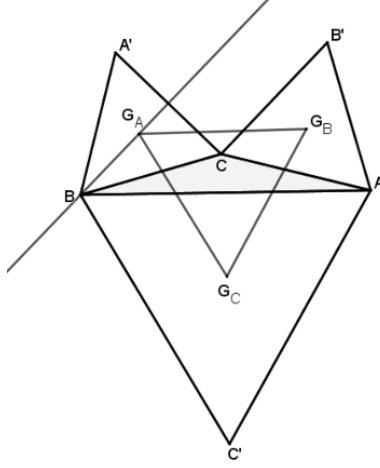


Şekil 19: Dış Napoleon üçgeninin konumuna dair bir örnek

N Noktasının Konumu

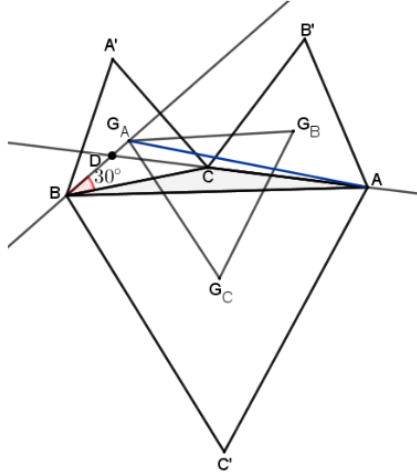
Eğer ABC üçgeninin bir iç açısı 150° 'ye eşit ise N noktası ABC üçgeninin sınırındadır. ABC üçgeninin her bir iç açısı 150° 'den küçük ise N noktası ABC üçgeninin içindedir. ABC üçgeninin bir iç açısı 150° 'den büyük ise N noktası ABC üçgeninin dışındadır.

Kanıt. Varsayalım ki $\widehat{ACB}$ iç açısı 150° olsun. O halde $\widehat{CBA}$ ve $\widehat{BAC}$ iç açılarının toplamı 30° 'dir. Şimdi B noktası ile G_A noktasından geçen bir doğru alınsın. (bkz. Şekil 20).



Şekil 20

AC kenarını da bir doğru olacak şekilde uzatılsın(bkz. Şekil 21)



Şekil 21

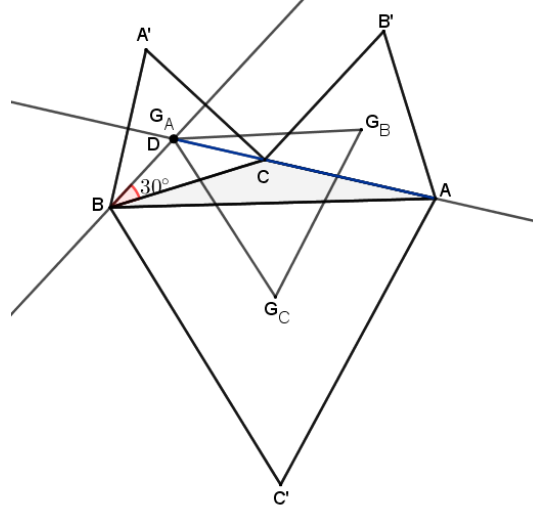
BG_A ve AC doğruları kesişir çünkü paralel olmaları için $\widehat{G_ABA}$ ve $\widehat{BAD}$ açılarının toplamı 180° olmalıdır. Fakat varsayımdan dolayı $\widehat{BAD}$ açısı 30° 'den küçük, $\widehat{G_ABA}$ açısı ise 60° 'den küçüktür. Bu iki açının toplamı 90° bile küçük olur. Dolayısıyla paralel değildirler ve bir noktada kesişirler. BG_A ve AC doğrularının kesiştikleri noktaya D diyelim. G_A , eşkenar üçgenin ağırlık merkezi olduğundan

$$\widehat{G_ABC} = \widehat{DBC} = 30^\circ$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \widehat{ADB} + \widehat{DBC} + \widehat{CBA} + \widehat{BAC} &= 180^\circ \\ \widehat{ADB} + 30^\circ + 30^\circ &= 180^\circ \\ \widehat{ADB} &= 120^\circ \end{aligned}$$

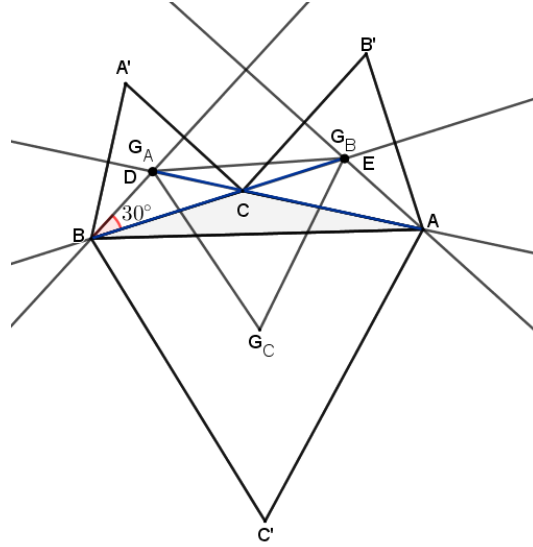
bulunur. O halde $\widehat{BCD}$ açısı da 30° olur ki bu da D noktasının G_A noktası üzerinde olduğunu gösterir.(bkz. Şekil 22)



Şekil 22

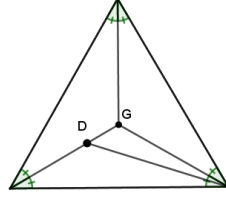
Aynı işlemleri $AB'C'$ üçgeninde de uygulanırsa, bu sefer de AG_B ile BC doğrularının kesişimine E denirse, E noktasının G_B noktası üzerinde olduğu görülebilir(bkz. Şekil 23)

Dolayısıyla N noktası $AG_A = AC$ ve $BG_B = BC$ doğrularının kesişimi olan C noktası olur. Yani N , ABC üçgeninin bir kenarının üzerindedir.



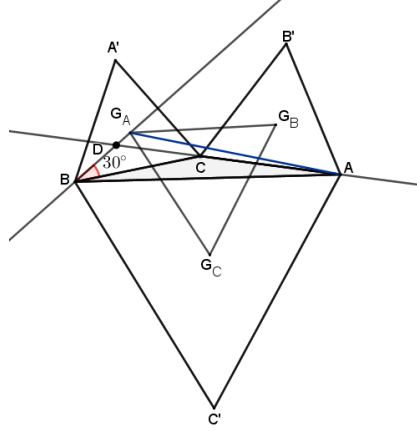
Şekil 23

Buradan yola çıkarak $\widehat{CBA}$ ve $\widehat{BAC}$ açılarının toplamı 30° 'den az ise (yani $\widehat{ACB}$ 150° 'den büyük ise) $\widehat{ADB}$ açısı 120° 'den büyük olur. $\widehat{DBA} = 30^\circ$ ve $\widehat{ADB} > 120^\circ$ olduğundan $\widehat{BCD} < 30^\circ$ olur. $\widehat{BCG_A} = 30^\circ$ olduğundan D noktası BG_A doğru parçasının arasındadır(bkz. Şekil 24).



Şekil 24

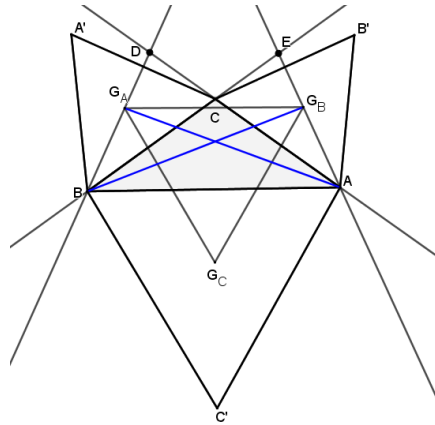
O halde AG_A doğrusu ABC üçgeninin dışındadır (bkz. Şekil 25).



Şekil 25

N noktası AG_A doğrusunun üzerinde olduğundan ABC üçgeninin dışındadır.

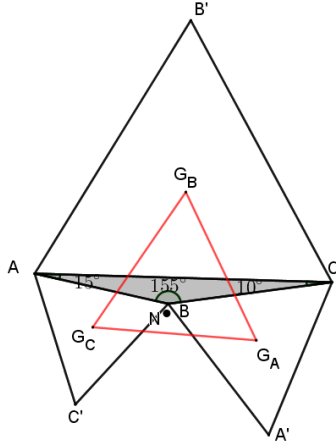
Benzer şekilde ABC üçgeninin bütün iç açıları 150° 'den küçük ise AG_A ve BG_B doğruları ABC üçgeninin içinde kesişir. Dolayısıyla N noktası ABC üçgeninin içinde olur. (bkz. Şekil 26)



Şekil 26

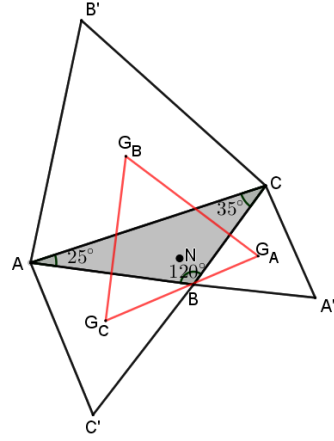
Örnekler

1)



N noktasının ABC üçgeninin dışında olduğu durum.

2)



N noktasının ABC üçgeninin içinde olduğu durum.

□

4 Sonuç

Napoleon Teoremi'nin keşfedilmesinden bu yana geçen 170 yılı aşkın zaman içerisinde 150'den fazla çalışma yayınlandı. İlgi çekici olan bu teorem, gerek profesyoneller, gerekse amatörleri büyüledi. Bu geçen zaman içerisinde teoremin bir çok genellemesi, kanıtları, tarihi ve Napoleon'a atfedilmesiyle oluşan şaibeliği hakkında çalışmalar yayınlandı. Hala daha bu teoremle ilgili çalışmalar sürmekte. 2000 yılından bu yana [2, 7, 5, 4, 9] kaynaklarında da olduğu gibi yeni çalışmalar, kanıtlar devam etmektedir. Teoremle ilgili "Geometry Revisited" kitabında çalışmaları bulunan ve 20. yüzyılın en büyük geometricilerinden kabul edilen H. S. M. Coxeter'ın 80. doğum günü vesilesiyle J. F. Rigby, 1988 yılında yayınladığı "Napoleon Revisited" adlı çalışmasını H. S. M. Coxeter'a adanmıştır [8]. Napoleon Teoremi sadece bir geometrik keşif olarak kalmayıp mozaik oluşturma ve mimaride de kullanılmıştır [8].

Kaynaklar

- [1] Bollobas, Bela. "43. Equilateral Triangles: Napoleon's Theorem." *The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis*. Cambridge: Cambridge UP, (2010), pp. 124-125.
- [2] Branko Grünbaum, "Is Napoleon's Theorem Really Napoleon's Theorem?" *The American Mathematical Monthly*, Vol. 119, No. 6 (2012), pp. 495-501
- [3] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association Of America (1967), pp. 61-65
- [4] E. Emanouilidis and R. Bell, Latin squares and their inverses, *Math. Gaz.*, 88, (March 2004), pp. 127-128.
- [5] J. A. Grzesik, "Yet Another Analytic Proof of Napoleon's Theorem" *The American Mathematical Monthly*, Vol. 123, No. 8 (October 2016), p. 824.
- [6] Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry* (1994), pp. 180-181
- [7] Deniz Öncel and Murat Kirişçi, "Some Contributions To Regular Polygons" *Konuralp Journal of Mathematics* Volume 5 No. 2 (2017), pp. 70-77.
- [8] J. F. Rigby, "Napoleon Revisited", *Journal of Geometry*, Vol. 33 (1988)
- [9] G.C. Shephard, "Another generalisation of Napoleon's Theorem", *Elem. Math.* 64 (2009) pp.137 - 145
- [10] John E. Wetzel, "Converses of Napoleon's Theorem", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 99, No. 4 (Apr., 1992), pp. 339-351
- [11] <https://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml>