

Analiz IV: İki Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik

Çözümlü Alıştırma

Tanım: Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında sürekli olması için şu üç şart sağlanmalıdır:

1. $f(a, b)$ tanımlı olmalıdır.
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ limiti var olmalıdır.
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ olmalıdır.

Örnek 1: $f(x, y) = 3x^2y - 5x + 2y$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Polinom tipi fonksiyonlar tanımlı oldukları her yerde sürekli dir. İlgili noktadaki limit değerini ve fonksiyon değerini kontrol edelim. Önce fonksiyonun bu noktadaki değerini bulalım:

$$f(1, 2) = 3(1)^2(2) - 5(1) + 2(2) = 6 - 5 + 4 = 5$$

Şimdi limiti hesaplayalım:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x^2y - 5x + 2y) = 3(1)^2(2) - 5(1) + 2(2) = 5$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = f(1, 2) = 5$ olduğundan, $f(x, y)$ fonksiyonu $(1, 2)$ noktasında sürekli dir.

Örnek 2: $f(x, y) = \frac{e^x \sin(y)}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun $(0, \frac{\pi}{2})$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Fonksiyon rasyonel ve trigonometrik/üstel fonksiyonların birleşimidir. Payda $(x^2 + 1)$, hiçbir reel x değeri için sıfır olmaz. Noktadaki fonksiyon değeri:

$$f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^0 \sin(\frac{\pi}{2})}{0^2 + 1} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

Limit değeri:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})} \frac{e^x \sin(y)}{x^2 + 1} = \frac{e^0 \sin(\frac{\pi}{2})}{0^2 + 1} = 1$$

Limit değeri ile fonksiyon değeri eşit olduğu için fonksiyon $(0, \frac{\pi}{2})$ noktasında sürekli dir.

Örnek 3:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm:

Tanımdan $f(0, 0) = 0$ 'dır. Limit değerinin de 0 olup olmadığını kontrol etmeliyiz. İşlemi kolaylaştırmak için kutupsal koordinatlara $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$ geçelim. $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ iken $r \rightarrow 0$ olur.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

$(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$ ifadesi sınırlı bir ifadedir. Sınırlı bir ifade ile sıfıra giden bir ifadenin çarpımının limiti sıfırdır. Dolayısıyla limit 0'dır. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ olduğundan, fonksiyon $(0,0)$ noktasında süreklidir.

Örnek 4:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm:

Süreklilik için limitin var olması ve $f(0,0) = 0$ 'a eşit olması gerekir. Orijine farklı yollardan ($y = mx$ doğruları boyunca) yaklaşalım:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Limitin sonucu m 'ye bağlı çıkmıştır. Yani orijine hangi doğru boyunca yaklaştığımıza göre farklı limit değerleri elde ederiz ($m = 1$ için $1/2$, $m = 0$ için 0 gibi). Limit mevcut olmadığından, fonksiyon $(0,0)$ noktasında sürekli değildir.

Örnek 5:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm:

Önce orijine $y = mx$ doğruları boyunca yaklaşalım:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} \frac{x^2(mx)}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^2(x^2 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

Doğrusal yollar boyunca limit 0 çıkıyor. Ancak bu, limitin 0 olduğunu garanti etmez; her yol için aynı çıkmalıdır. Şimdi de orijine bir parabol olan $y = x^2$ eğrisi boyunca yaklaşalım:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^2(x^2)}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

$y = mx$ boyunca limit 0 iken, $y = x^2$ boyunca limit $1/2$ çıktı. Farklı yollardan farklı limit değerleri elde edildiği için limit yoktur. Limit olmadığı için fonksiyon $(0,0)$ noktasında sürekli değildir.